Partie 2 : Racines carrés d'un nombre complexe non nul

Soit $\beta = a + ib$ un nombre complexe non nul. L'objectif est de résoudre l'équation $z^2 = \beta$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

On pose $z = x + iy$ où x et y sont deux réels

1) Montrer que $z^2 = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$

2) a) On suppose que $b \geq 0$. A l'aide de la question 1), montrer que l'équation $z^2 = \beta$ possède exactement deux solutions distinctes z_1 et z_2. On montrera que $z_2 = -z_1$ et on exprimera z_1 et z_2 en fonction de a et b

b) On suppose que $b < 0$. A l'aide de la question 1), montrer que l'équation $z^2 = \beta$ possède exactement deux solutions distinctes z_1 et z_2. On montrera que $z_2 = -z_1$ et on exprimera z_1 et z_2 en fonction de a et b

Remarque :

- Les solutions de l'équation $z^2 = \beta$ sont appelées **les racines carrées complexes** de β
- On vient donc de voir qu'un **nombre complexe non nul** admet exactement deux racines carrées complexes opposées

3) En utilisant la question 2), déterminer les racines carrées complexes de $2i$ puis les racines carrées complexes de $3 - 4i$