# Droites

## I) Caractérisation d'une droite :

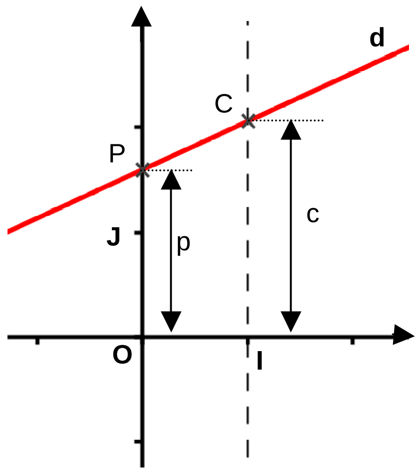
### a) équation d'une droite :

rappel : **La représentation graphique** de **toute fonction affine** est une **droite**.

| |
|---|
| la réciproque est-t-elle vraie ? Toute droite correspond elle à la représentation graphique d'une fonction affine ? |

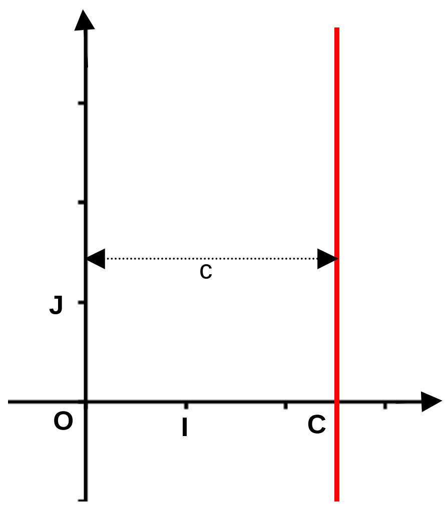
**propriété :** Dans un repère, **toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées** est la **représentation graphique d'une fonction affine**.
Tous les points **M ($x$;y)** d' une **droite d** vérifient **une équation de la forme**
**y = m$x$ + p** où m et p désignent des réels.

► ***démonstration***
Le plan est muni du repère (O; I; J).
Soit d une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
d coupe (OJ) en P : (0 ; p). Elle coupe également la parallèle menée par I à l'axe des ordonnées en C : (1 ; c).
Posons alors m = c – p. Considérons **la fonction affine $f$ définies par $f(x)$ = m$x$ + p**
On a donc,
$f(0)$ = p et $f(1)$ = m x 1 + p = m + p = (c – p) + p = c.
donc C et P sont deux points de la représentation graphique $f$
Par suite, la droite d, passant par P:(0 ; p) et C: (1 ; c) est la représentation graphique de la fonction affine $f$ et chaque point M: ($x$ ; y) vérifie donc l'équation y = m$x$ + p




**propriété :** Dans un repère, **une droite parallèle à l'axe des ordonnées** a une **équation** de la forme **$x$ = c**

► ***démonstration***
Le plan est muni du repère (O; I; J).
Soit d une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
**d coupe** l'axe **(OI) en C : (c ; 0)**.
Chaque point de d a donc pour abscisse c puisque d est parallèle à l'axe des ordonnées.
L'équation de d est donc **$x$ = c**



b) coefficient directeur d'une droite :

rappel : Soit la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.
La représentation graphique de la fonction affine $f$ est la droite d'équation
$y = mx + p$.
**m** est le **coefficient directeur de la droite**.
**p** est **l'ordonnée à l'origine de la droite**.

**propriété :** Soit une droite d non parallèle à l'axe des ordonnées et **m son coefficient directeur**.
Si A:($x_A$ ; $y_A$) et B:($x_B$ ; $y_B$) sont deux points distincts de d alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

► ***démonstration***

Soient deux points distincts : **A:($x_A$ ; $y_A$)** et **B:($x_B$ ; $y_B$)**
D'après les propriétés précédentes, la droite (AB), qui a une équation du type
$y = mx + p$ est la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = mx + p$.
On a donc $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$.
Donc,**d'après la formule du coefficient directeur vu pour la fonction affine** on a :

$$m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

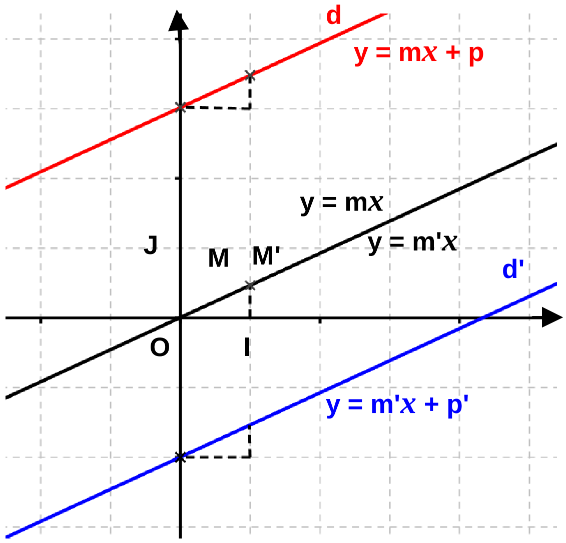
## II) Position relatives de deux droites - Points alignés :

a) droites parallèles :

**propriété :** Dans un repère, **deux droites d et d' respectivement d'équations $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles** si et seulement si **$m = m'$**

► ***démonstration***

***rappel*** : On a vu en troisième que la droite représentant la fonction affine $f(x) = mx + p$ est parallèle à la droite représentant la fonction linéaire $f(x) = mx$




Le plan est muni du repère (O; I; J).
Dans notre cas, d et d' sont donc parallèles si et seulement si les droites d'équations
$y = mx$ et $y = m'x$ sont parallèles.
Ces deux droites passent par **O:(0 ; 0)**.
D'autre part,
la première passe par le point **M:(1 ; m)** et la seconde par le point **M':(1 ; m')**
donc d et d' sont parallèles si et seulement si M et M' sont confondus donc d et d' sont parallèles si et seulement si $m = m'$

## b) droites sécantes:

**propriété :** Dans un repère, **deux droites d et d' respectivement d'équations $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont sécantes** si et seulement si **$m \neq m'$**

► ***démonstration***

D'après la propriété précédente,

d et d' **sont parallèles** si et seulement si **$m = m'$**

donc d et d' **ne sont pas parallèles (donc sécantes)** si et seulement si **$m \neq m'$**

> ce type de raisonnement repose sur la contraposition.
> exemple :
> la contraposée de l'expression (« s'il pleut, alors le sol est mouillé ») est (« si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas »).
> « s'il pleut, alors le sol est mouillé » donc « si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas »

## c) points alignés :

**propriété :** Soient A, B, C trois points dont deux ont des abscisses différentes.
Les points **A, B, C sont alignés** si et seulement si les **droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur**.

► ***démonstration***

- Si **A, B, C** sont **alignés,** alors les droites **(AB) est (AC) sont confondues** donc parallèles et elles ont **le même coefficient directeur**.

- Réciproquement, si **(AB) et (AC) ont le même coefficient directeur**, alors elles sont parallèles. Or, **elles ont un point commun A** donc (AB) et (AC) sont confondues. Par suite, **A, B, C sont alignés**.

# Fonction carré - Fonctions polynômes du second degré

## I) Fonction carré :

**définition :** **La fonction carré** est la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Tout nombre a un carré, $f$ **est donc bien définie sur** $\mathbb{R}$

Ex : $f(-4) = (-4) \times (-4) = 16$ $\qquad$ $f(5) = 25$

**théorème :** la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est :

▶ strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$

▶ strictement croissante sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$

▶ ***démonstration***

u et v sont deux nombres réels tels que **u<v**, c'est à dire **u–v<0**, comparons $f$(u) et $f$(v)

u et v positifs : u ∈ [ 0; +∞ [; v ∈ [ 0; +∞ [

$f$(u) – $f$(v)
= $u^2 - v^2$
= (u – v) (u + v)

or, u<v donc u – v <0
donc (u – v)(u + v) < 0
par suite, $f$(u) – $f$(v) < 0
donc $f$(u) < $f$(v)

ainsi, pour tous réels positifs u et v,
si u < v alors $u^2 < v^2$
La fonction carré est donc **croissante**
sur [ 0 ; +∞ [

u et v négatifs : u ∈ ]–∞; 0]; v ∈ ∈ ]–∞; 0]

$f$(u) – $f$(v)
= $u^2 - v^2$
= (u – v) (u + v)

or, u<v donc u – v <0
donc (u – v)(u + v) > 0
par suite, $f$(u) – $f$(v) > 0
donc $f$(u) > $f$(v)

ainsi, pour tous réels négatifs u et v,
si u < v alors $u^2 > v^2$
La fonction carré est donc **décroissante**
sur ] –∞ ; 0 ]

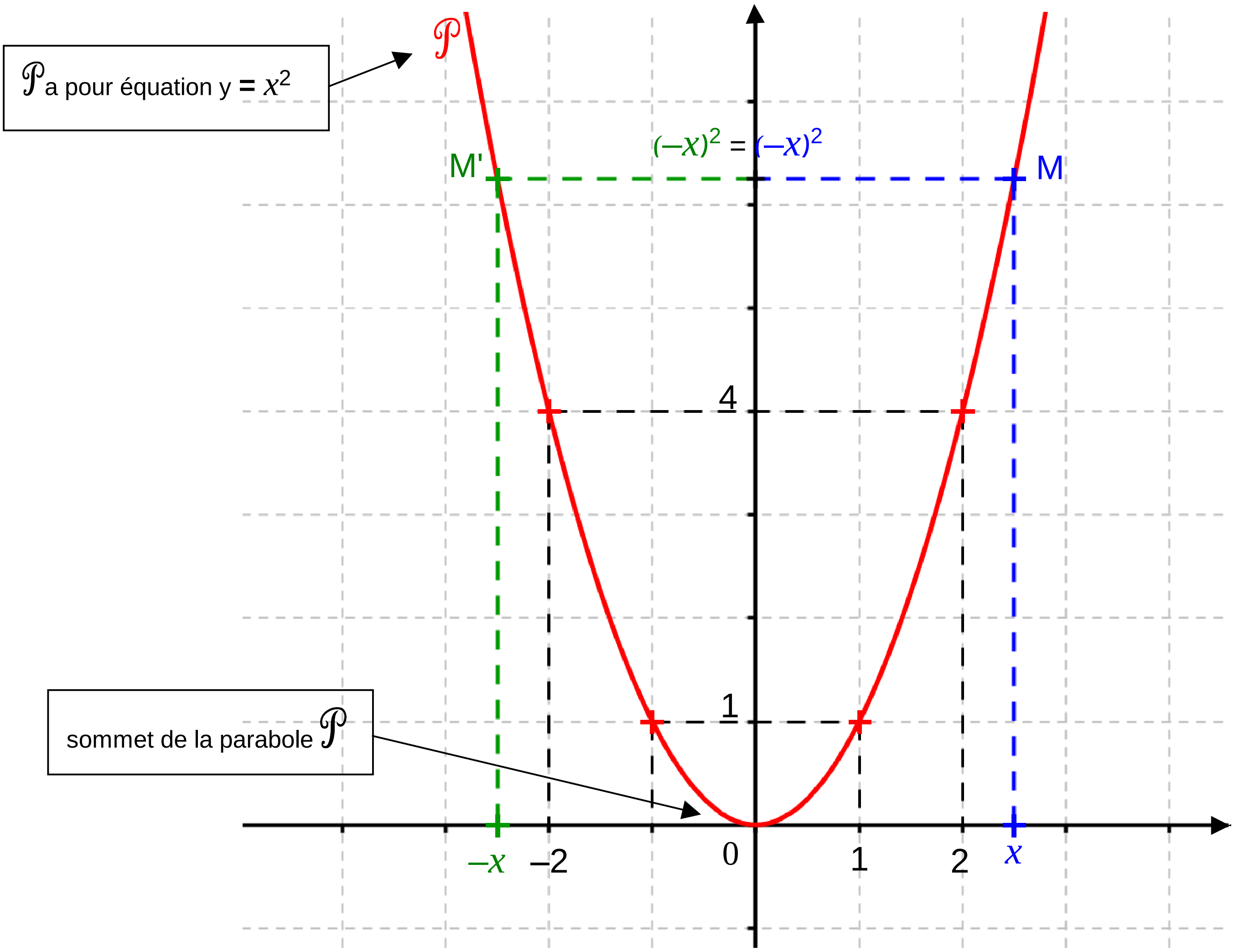
**Tableau de variations de la fonction carré :**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↘ | $0$ | ↗ | |

$f(0) = 0$. 0 est **le minimum** de la fonction carré.

**<u>Représentation graphique de la fonction carré :</u>**

**<u>définition</u>** : Dans un repère orthogonal d'origine O, **la représentation graphique** de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ est **une parabole de sommet O**.




**<u>théorème</u>** : la parabole $\mathscr{P}$ représentant la fonction carré admet un axe de symétrie : **l'axe des ordonnées**.

► ***démonstration***

$x$ est un nombre réel.

Le point M ($x$; $x^2$) appartient à la parabole $\mathscr{P}$.

Le point symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées est M' ($-x$; $x^2$)

Or, M' appartient également à $\mathscr{P}$ puisque $(-x)^2 = x^2$

donc $\mathscr{P}$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

## II) Fonctions polynômes de degré 2 :

**définition :** Une fonction **polynôme du second degré** (appelée aussi **trinôme**) est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois nombres réels avec a ≠ 0.

Ex :

▶ $f(x) = -5x^2 + 3x - 1$ (a =–5; b=3; c=–1)

▶ $g(x) = 8x^2 + 7$ (a =8; b=0; c=7)

▶ $h(x) = 2(x - 1)(x + 4)$

en effet, $h(x) = (2x - 2)(x + 4) = 2x^2 + 8x - 2x - 8 = 2x^2 + 6x - 8$ (a =2; b=6; c=–8)

▶ $m(x) = (2x - 3)^2 + 7$

en effet, $4x^2 - 12x + 9 + 7 = 4x^2 - 12x + 16$ (a =4; b=–12; c=16)

### Représentation graphique - Sens de variation :

**propriétés (admises) :**

▶ La **représentation graphique** d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole**. Appelons $x_S$ l'abscisse du sommet S

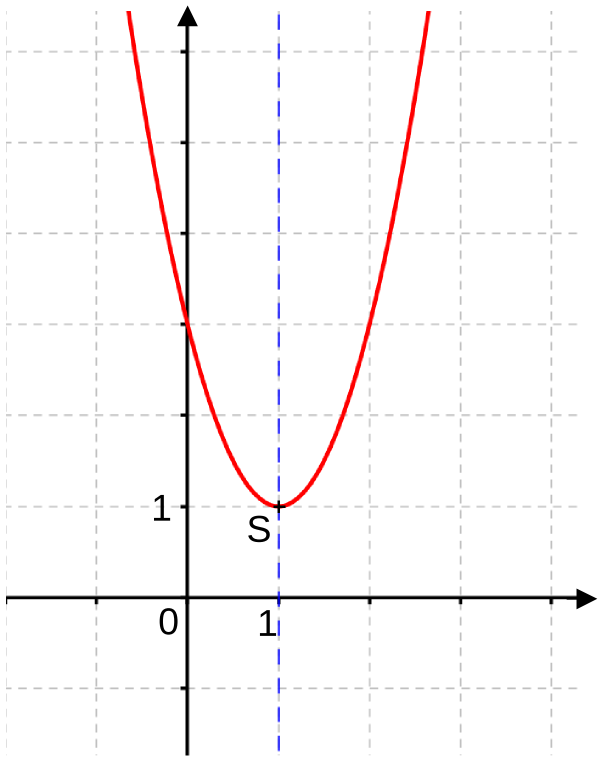
▶ La parabole admet **un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées**. Le sommet de la parabole se situe sur l'axe de symétrie.

▶ La fonction est donc :

**ou** décroissante sur $]-\infty\ ; x_S]$ puis croissante sur $[x_S\ ; +\infty[$

**ou** croissante sur $]-\infty\ ; x_S]$ puis décroissante sur $[x_S\ ; +\infty[$

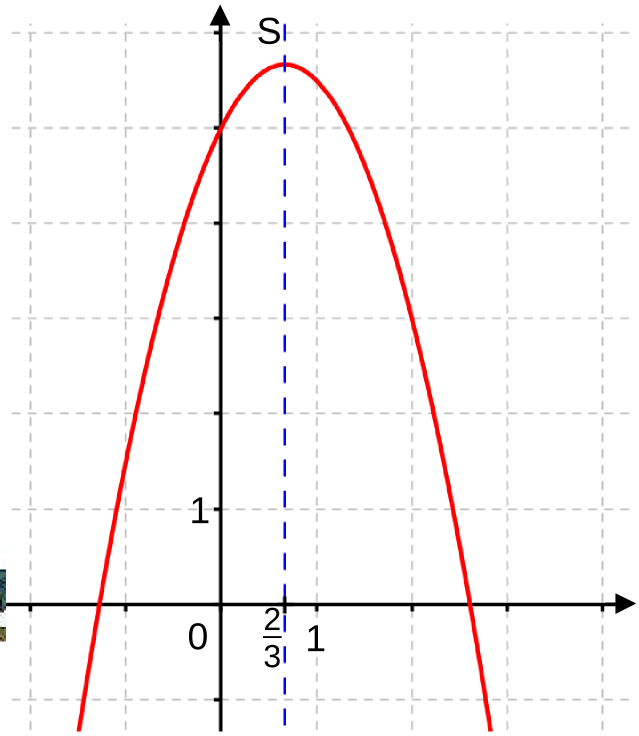
Ex : $f : x \longmapsto 2x^2 - 4x + 3$




| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↘ | 1 | ↗ | |

La parabole a l'allure d'une "vallée". Son **sommet** correspond au **minimum** de la fonction.
C'est toujours le cas pour les fonctions du type $ax^2 + bx + c$ quand **a est un nombre positif.**

Ex : $f : x \longmapsto -1{,}5x^2 + 2x + 5$




| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | |

La parabole a l'allure d'une "colline". Son **sommet** correspond au **maximum** de la fonction.
C'est toujours le cas pour les fonctions du type $ax^2 + bx + c$ quand **a est un nombre négatif**.

**propriété (admise) :**

Soit une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$

Il existe deux nombres $\alpha$ et $\beta$ tels que $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Cette écriture est la **forme canonique de $f(x)$**

Ex :

► Si $g(x) = 3x^2 - 30x + 60$, la **forme canonique** s'écrit $3(x-5)^2 - 15$

vérifions le :

$3(x-5)^2 - 15 = 3(x^2 - 10x + 25) - 15 = 3x^2 - 30x + 75 - 15 = 3x^2 - 30x + 60$

► Si $h(x) = x^2 - 6x$, la **forme canonique** s'écrit $(x-3)^2 - 9$

vérifions le :

$(x-3)^2 - 9 = x^2 - 6x + 9 - 9 = x^2 - 6x$

# Fonctions affines

## I) Fonction affine :

**définition :** **une fonction affine $f$** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par **$f(x) = ax + b$** où a et b sont deux nombres réels

▶ **Si b = 0** la fonction $f$ est **linéaire** .

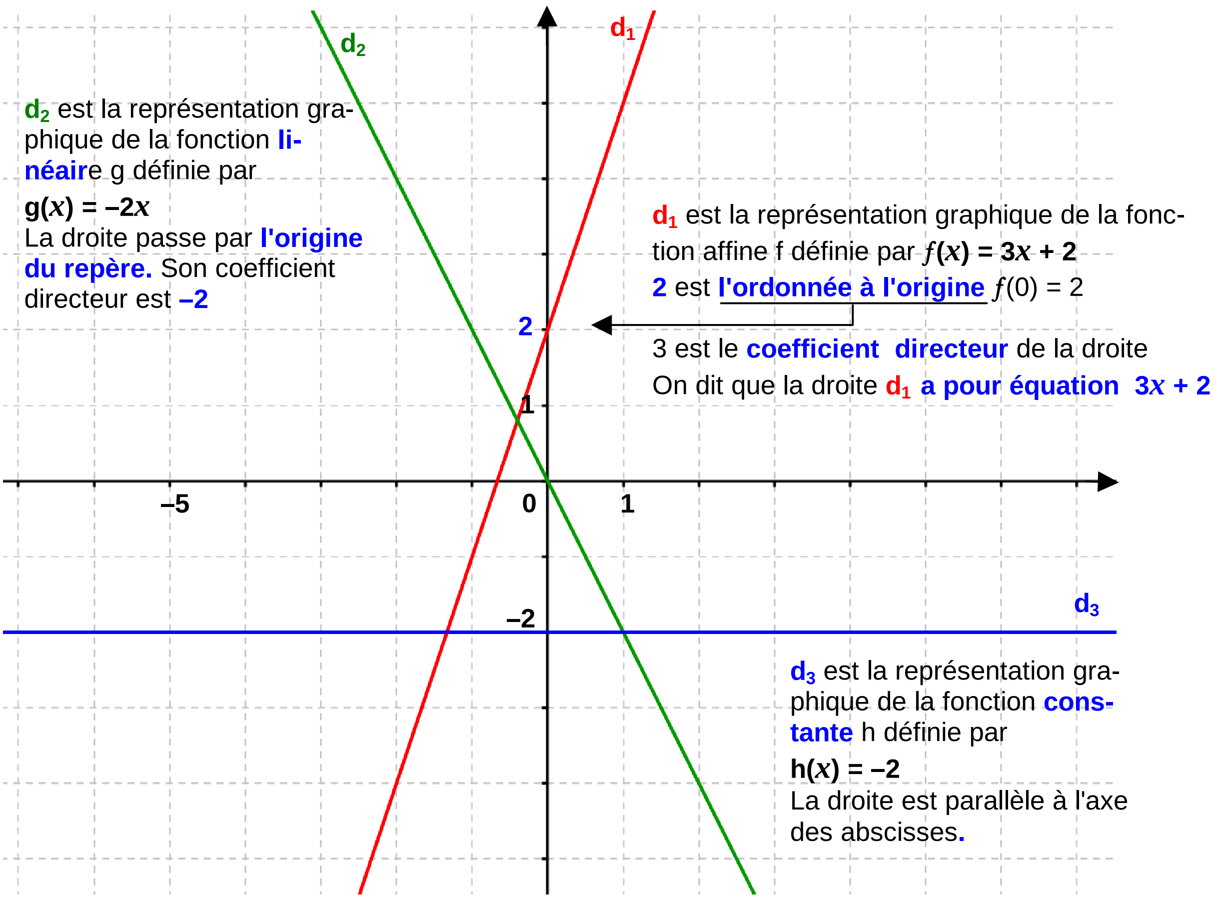
Ex : la fonction définie par **$f(x) = 5x$** est une **fonction linéaire.**

▶ **Si a = 0** la fonction $f$ est **constante** .

Ex : la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2}{3}$ est une **fonction constante.**

| |
|---|
| attention, les fonctions linéaires et constantes restent des fonctions affines !<br>Les fonctions linéaires et constantes sont des cas particuliers des fonctions affines. |

**propriété :** La représentation graphique de la **fonction affine $f$** est une **droite**.
**a** est **le coefficient directeur** de la droite. **b** est **l'ordonnée à l'origine de la droite**.
- Si la fonction est **linéaire**, la droite passe **par l'origine du repère**.
- Si la fonction est **constante**, la droite est **parallèle à l'axe des abscisses**.



**théorème :** Si $f$ est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ alors, pour tous nombres réels u et v distincts, $a = \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v}$

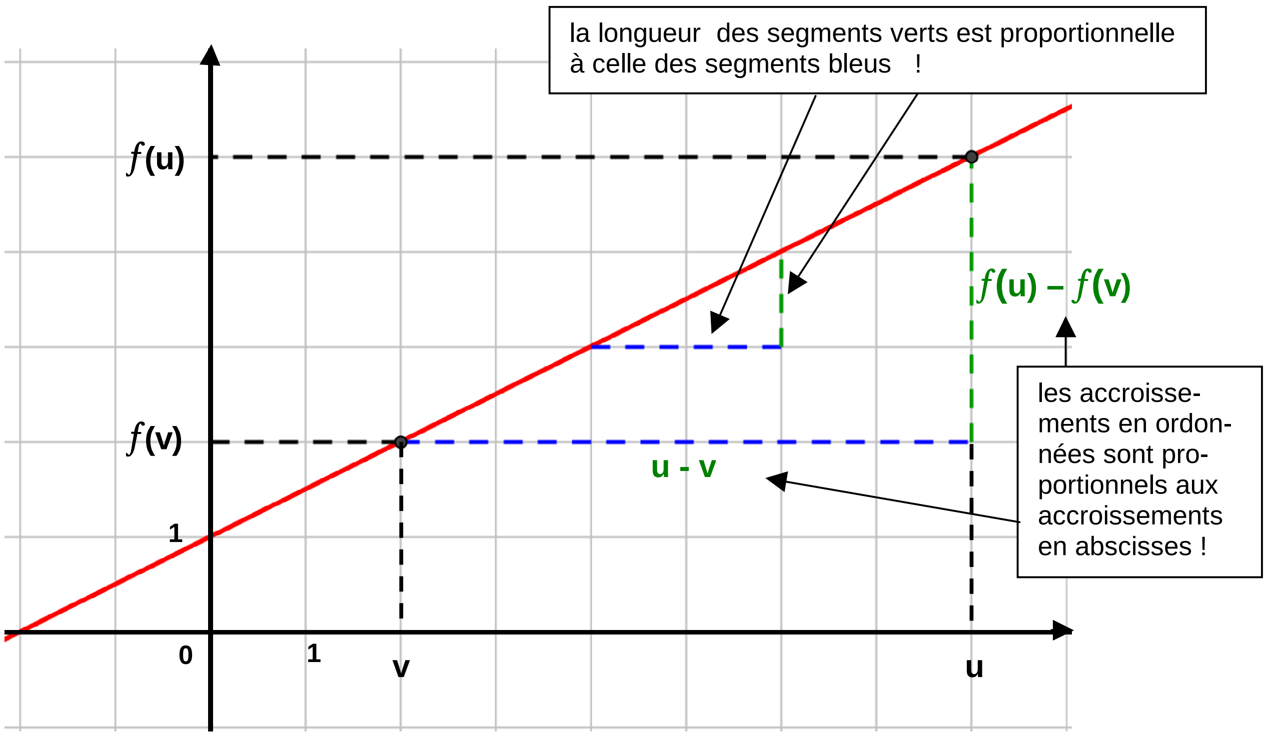
► ***démonstration***

Soient deux nombres réels u et v distincts,

$f(u) - f(v) = (au + b) - (av + b) = au + b - av - b = au - av = a(u - v)$

donc $a = \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v}$

je peux diviser par (u - v) car $u - v \neq 0$ puisque u et v sont distincts !




Ex : La fonction représentée ci-dessus est une fonction affine $f$ telle que $f(8) = 5$ et $f(2) = 2$. Le coefficient directeur de la droite est $a = \dfrac{f(8) - f(2)}{8 - 2} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

## II) Sens de variation d'une fonction affine :

**théorème :** $f$ est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$

▶ Si $a > 0$ la fonction $f$ est strictement croissante .

▶ Si $a < 0$ la fonction $f$ est strictement décroissante .

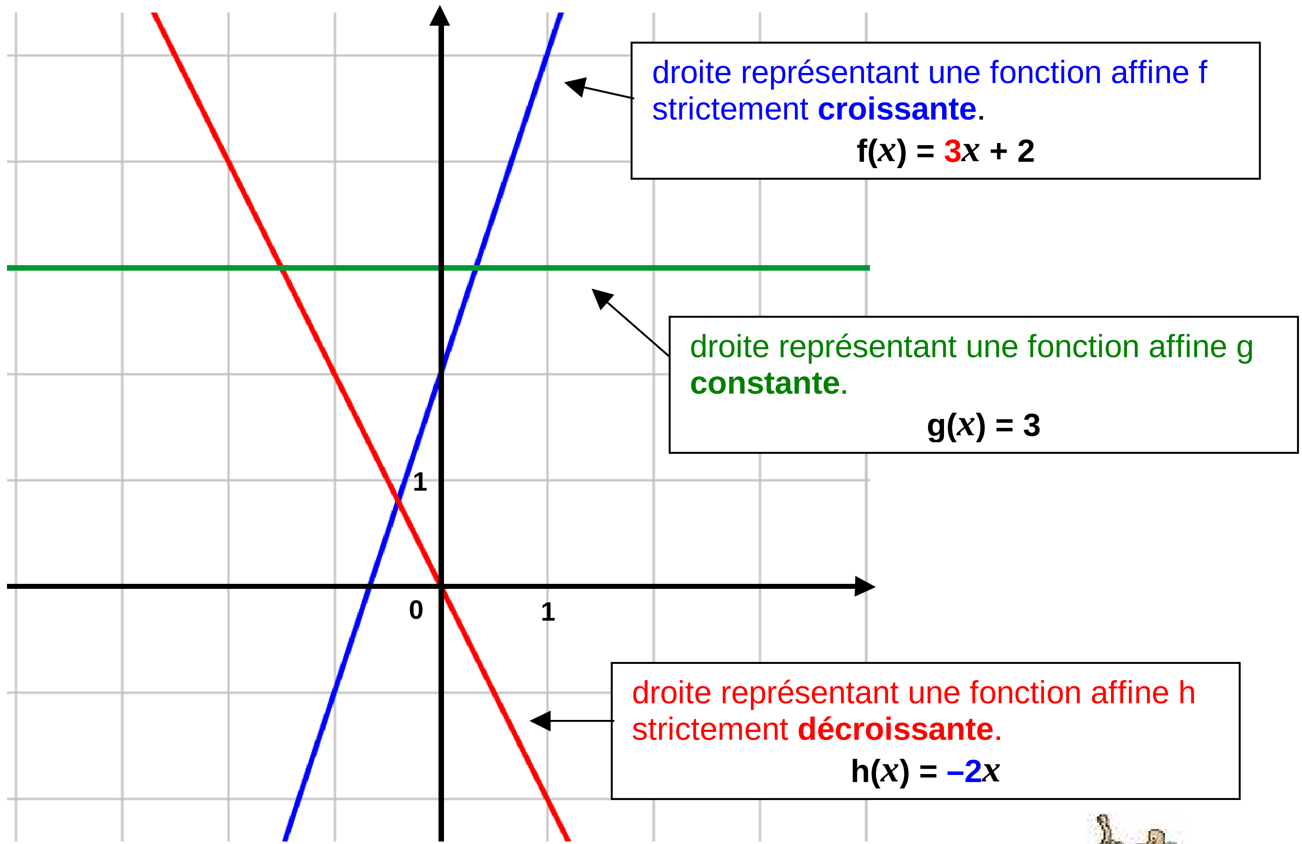
*rappel* : Si $a = 0$ la fonction $f$ est **constante** ! Tous les nombres réels auront la même image !

▶ ***démonstration***

$f$ est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$

| cas $a > 0$ | cas $a < 0$ |
|---|---|
| Soient $x_1$ et $x_2$ deux réels tels que : | Soient $x_1$ et $x_2$ deux réels tels que : |
| $x_1 > x_2$ | $x_1 > x_2$ |
| donc $ax_1 > ax_2$ | donc $ax_1 < ax_2$ |
| donc $ax_1 + b > ax_2 + b$ | donc $ax_1 + b < ax_2 + b$ |
| donc $f(x_1) > f(x_2)$ | donc $f(x_1) < f(x_2)$ |
| Quand $x$ augmente, $f(x)$ augmente; | Quand $x$ augmente, $f(x)$ diminue; |
| $f$ est donc strictement **croissante** | $f$ est donc strictement **décroissante** |

Ex :




Cette fonction est aussi une fonction linéaire !

# Fonction inverse - Fonctions homographiques

## I) Fonction inverse :

rappel : Tout nombre réel $x$ **différent de 0** a un inverse $\frac{1}{x}$

Ex : L'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$. L'inverse de $\frac{3}{4}$ est $\frac{1}{\frac{3}{4}}$ soit $\frac{4}{3}$

**définition :** **La fonction inverse** est la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$

Ex : $f(-3) = -\frac{1}{3}$ $f\left(\frac{1}{5}\right) = 5$ $f\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{6}{7}$

$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels sans 0. On le lit "$\mathbb{R}$ privé de zéro".
On peut aussi le noter à l'aide d'une réunion d'intervalles : $\mathbb{R}^* = ]-\infty\ ; 0[ \cup ]0\ ; +\infty[$

**théorème :** la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est :

► strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ; 0[$

► strictement décroissante sur l'intervalle $]0\ ; +\infty[$

► ***démonstration***
u et v sont deux nombres réels tels que **u<v**, c'est à dire **v–u>0**, comparons $f$(u) et $f$(v)

u et v positifs : $u \in ]0; +\infty[$; $v \in ]0; +\infty[$

$f(u) - f(v) = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v}{uv} - \frac{u}{uv} = \frac{v-u}{uv}$

or, u<v donc $v - u > 0$

donc $\frac{v-u}{uv} > 0$

par suite, $f(u) - f(v) > 0$
donc $f(u) > f(v)$

ainsi, pour tous réels positifs u et v,

si $u < v$ alors $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$

La fonction inverse est donc **décroissante** sur $]0\ ; +\infty[$

u et v négatifs : $u \in ]-\infty; 0[$; $v \in ]-\infty; 0[$

$f(u) - f(v) = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v}{uv} - \frac{u}{uv} = \frac{v-u}{uv}$

or, u<v donc $v - u > 0$

donc $\frac{v-u}{uv} > 0$

par suite, $f(u) - f(v) > 0$
donc $f(u) > f(v)$

ainsi, pour tous réels négatifs u et v,

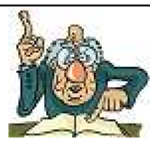
si $u < v$ alors $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$

La fonction inverse est donc **décroissante** sur $]-\infty\ ; 0[$

## Tableau de variations de la fonction inverse :

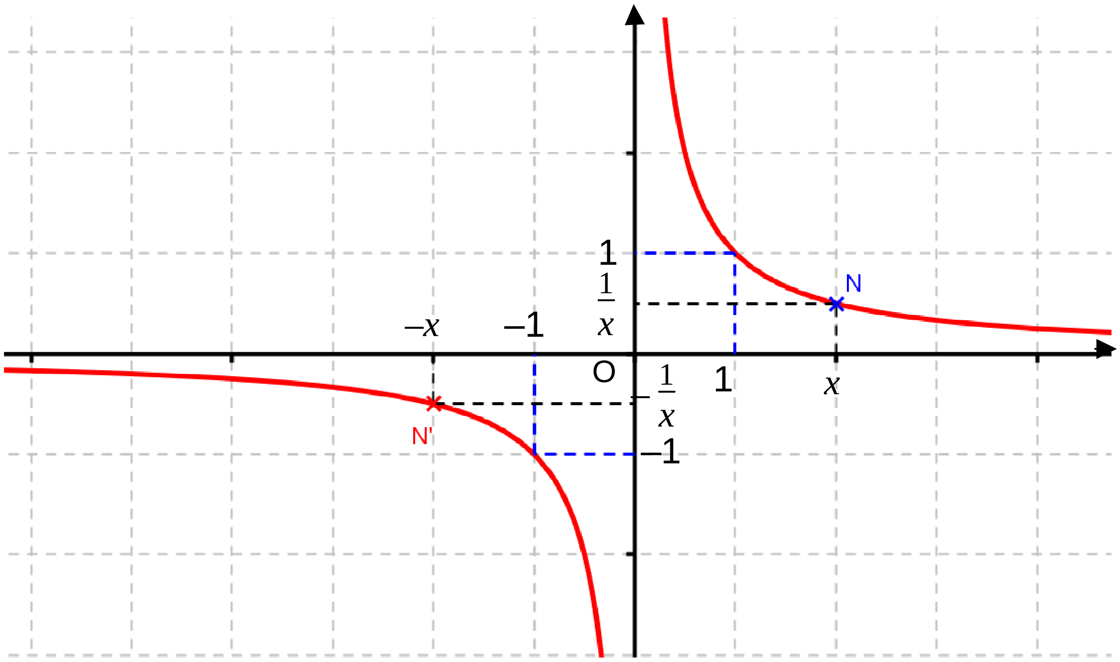
| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ |

La double barre indique que la fonction inverse n'est pas définie pour 0.



## Représentation graphique de la fonction inverse :

**<u>définition</u> :** Dans un repère, **la représentation graphique** de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est **une hyperbole**.




**<u>théorème</u> :** Dans un repère d'origine O, la courbe de **la fonction inverse** admet **O comme centre de symétrie**.

► ***démonstration***

$x$ est un nombre réel non nul.

Le point N $(x; \frac{1}{x})$ appartient à l'hyperbole.Le point symétrique de N par rapport l'origine O du repère est N' $(-x; \frac{-1}{x})$

Or, N' appartient également à l'hyperbole puisque l'inverse de $-x$ est $\dfrac{-1}{x}$

## II) Fonctions homographiques :

**définition :** Soient a, b, c, d quatre nombres réels avec $c \neq 0$

Toute fonction $f$ qui peut s'écrire sous la forme $f : x \longmapsto \dfrac{ax + b}{cx + d}$ est appelée **fonction homographique.** Sa courbe représentative est **une hyperbole**.

| attention, la fonction est définie pour les valeurs de $x$ **n'annulant pas** le dénominateur ! |
|---|

Ex : la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x - 5}{3x + 2}$ est une fonction homographique.

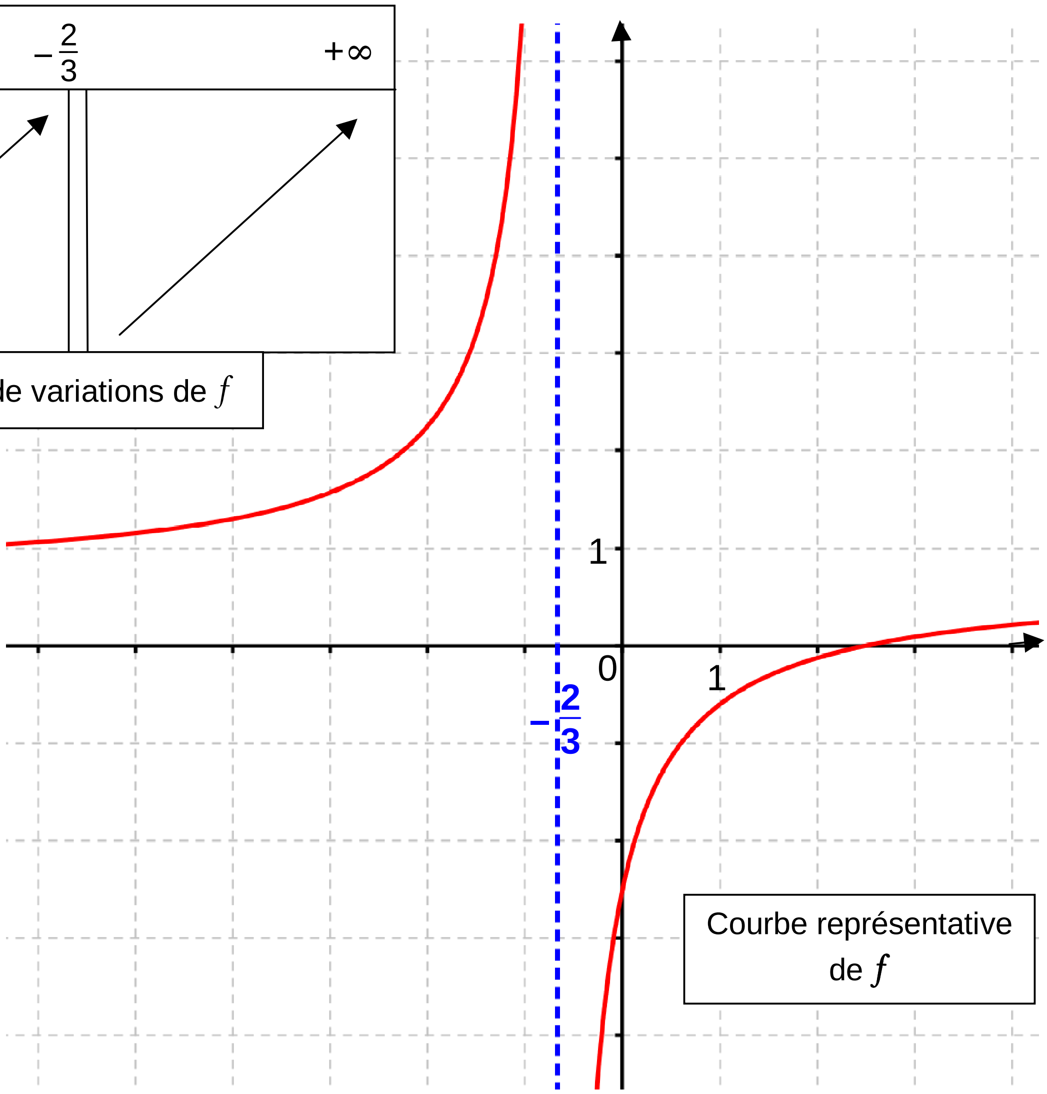
Elle est définie pour les nombres réels $x$ tels que $3x + 2 \neq 0$ soit $x \neq -\dfrac{2}{3}$

La fonction $f$ **est définie** sur l'intervalle $\left]-\infty\ ;-\dfrac{2}{3}\right[ \cup \left]-\dfrac{2}{3}\ ;+\infty\right[$ ou $\mathbb{R} - \{-\dfrac{2}{3}\}$

| $\mathbb{R} - \{-\frac{2}{3}\}$ peut aussi s'écrire $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ et se lit "$\mathbb{R}$ privé de $-\frac{2}{3}$ " |
|---|

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↗ | ‖ | ↗ | |

Tableau de variations de $f$

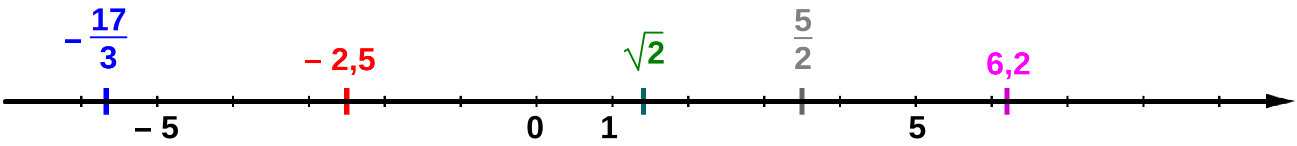



Courbe représentative de $f$

# Généralités sur les fonctions

## I) L'ensemble ℝ et les intervalles :

► Tous les nombres étudiés jusqu'à présent peuvent être rangés sur une droite graduée.

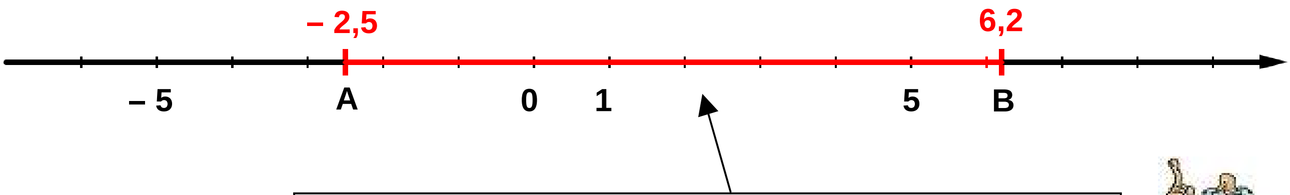



Tous les nombres **entiers**, **décimaux**, **rationnels**, **irrationnels** constituent l'ensemble des **nombres réels**; on le note ℝ

| |
|---|
| rappel : un nombre **rationnel** peut s'écrire sous forme de fraction.<br>$-\frac{17}{3}$; **–2,5**; $\frac{5}{2}$; **6,2** sont **des rationnels**<br>$\sqrt{2}$ est **irrationnel**, on ne peut pas l'écrire sous forme de fraction. |

► Tous les nombres compris entre deux abscisses de deux points d'une droite graduée constituent un intervalle.

Ex :




Toutes les abscisses comprises entre A et B forment un intervalle.

**[–2,5 ; 6,2]** est l'écriture de l'intervalle (en prenant –2,5 et 6,2 dans l'intervalle)

l'intervalle est fermé.

**]–2,5 ; 6,2]** est l'écriture de l'intervalle (en excluant –2,5 de l'intervalle)

l'intervalle est ouvert à gauche, fermé à droite.

**[–2,5 ; 6,2[** est l'écriture de l'intervalle (en excluant 6,2 de l'intervalle)

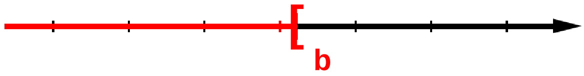
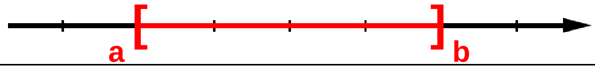
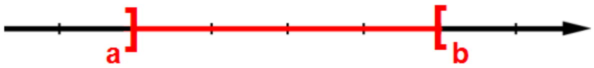
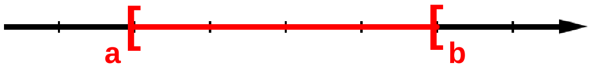
l'intervalle est fermé à gauche, ouvert à droite.

**]–2,5 ; 6,2[** est l'écriture de l'intervalle (en excluant –2,5 et 6,2 de l'intervalle)

l'intervalle est ouvert.

On peut écrire ℝ sous la forme de l' intervalle $]-\infty\ ;+\infty[$

$-\infty$ se lit "moins l'infini" $+\infty$ se lit "plus l'infini"

| intervalle | réels $x$ tels que | droite graduée |
|---|---|---|
| $]-\infty\ ;\ b[$ | $x < b$ |  |
| $[\ a\ ;\ b]$ | $a \leqslant x \leqslant b$ |  |
| $]\ a\ ;\ b\ [$ | $a < x < b$ |  |
| $[\ a\ ;\ b\ [$ | $a \leqslant x < b$ |  |

## II) Fonctions :

rappel : Je décide d'associer à chaque nombre d' une partie de ℝ un unique nombre. Je suis en train de fabriquer une fonction de cette partie de ℝ dans l'ensemble des réels.


**définition :** **définir une fonction $f$** d'une partie D de ℝ, c'est associer à chaque nombre $x$ de D un réel unique noté $f(x)$

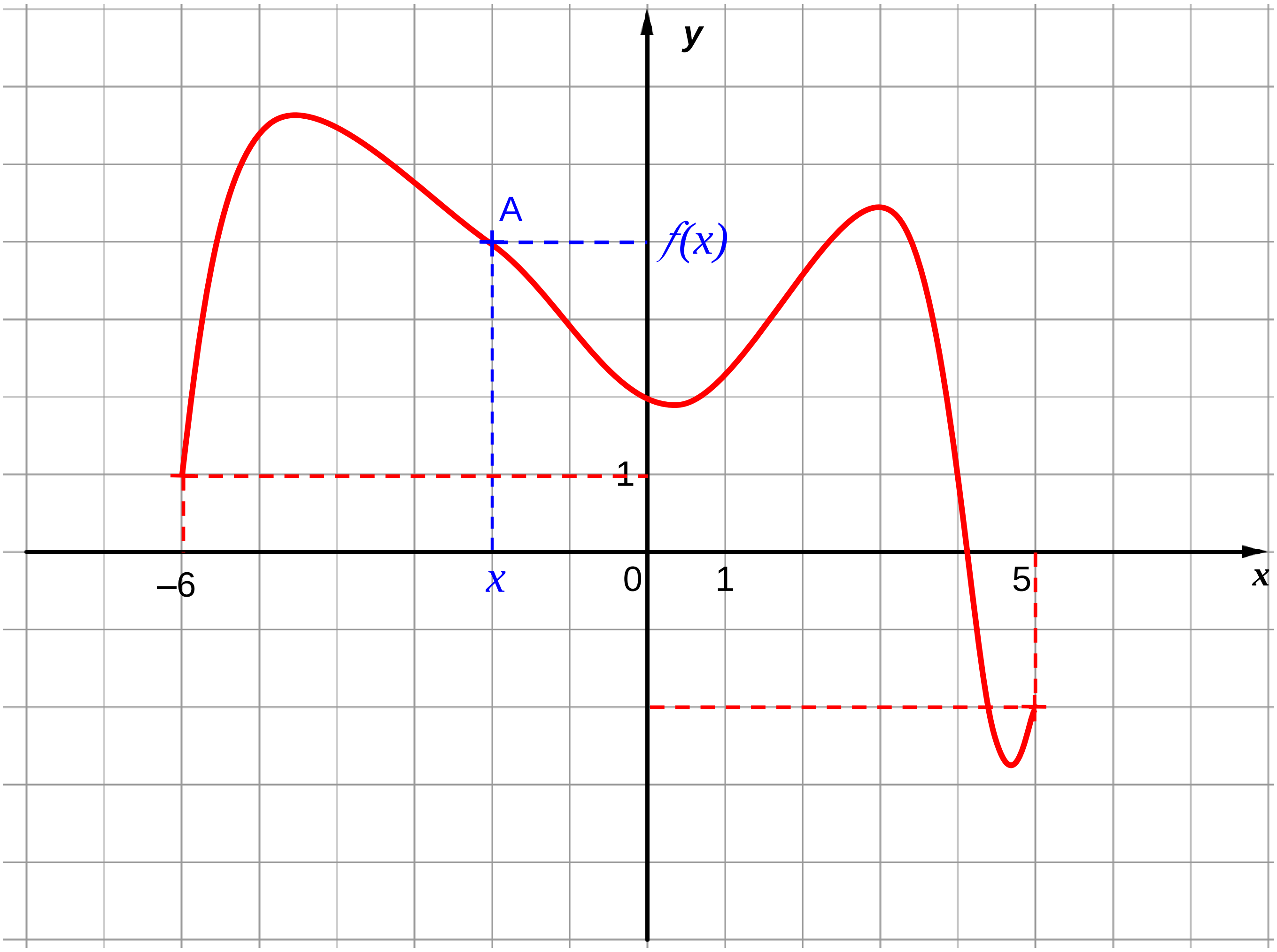
- D est appelé le **domaine de définition** de $f$
- $f(x)$ est l'**image** du nombre $x$
- si un nombre b est l'image de a par $f$, ($f$ (a) = b) alors a est l'**antécédent** de b par $f$
- la fonction f peut être notée; $\boldsymbol{f : x \longmapsto f(x)}$

**définition :** Soit $f$ une fonction et D son ensemble de définition.

Dans un repère du plan, la **représentation graphique** $\mathscr{C}$ de $f$ est l'ensemble des points de coordonnées **$(x; f(x))$** où $x$ est un nombre appartenant à D

La courbe C a pour **équation** y = $f(x)$

Ex : Voici la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle [-6;5]




## III) Sens de variation :

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I

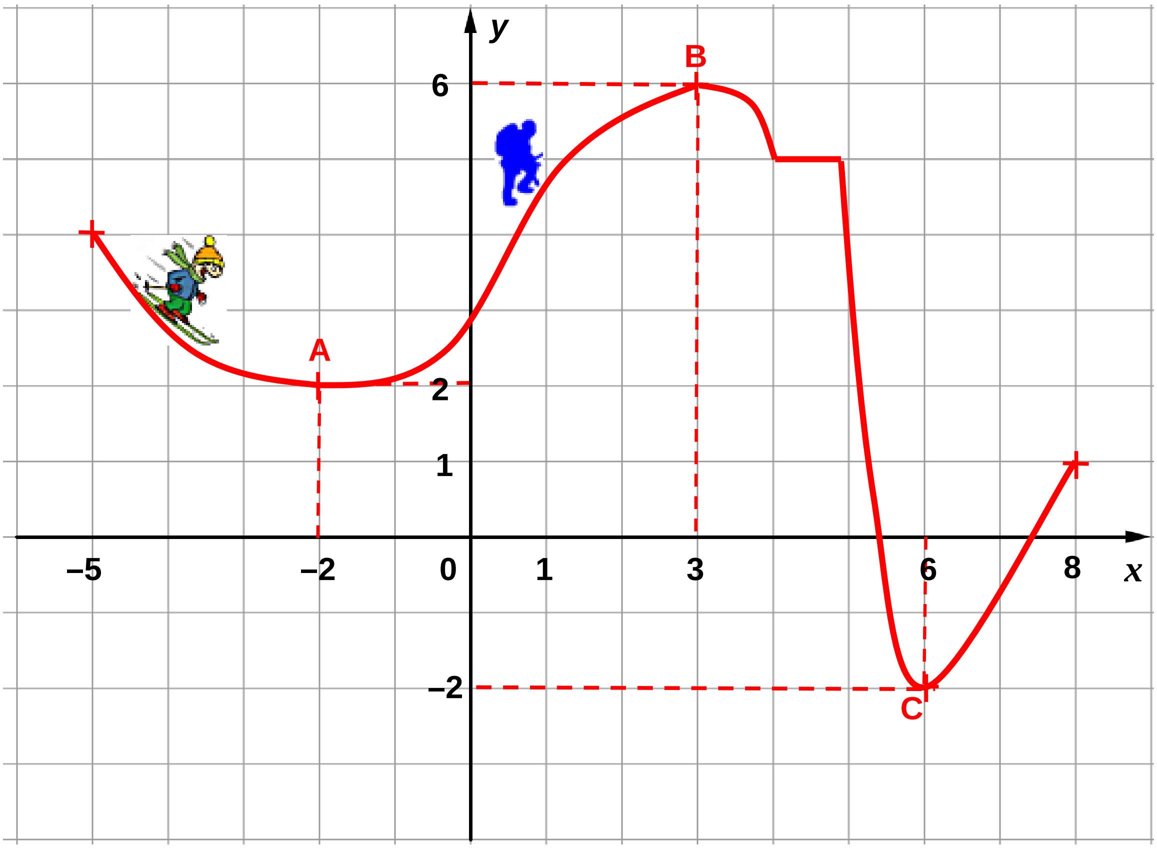
**définition** :

dire que **la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle I** signifie que, pour deux nombres a et b de l'intervalle I, **si a < b alors $f$ (a) < $f$ (b)**

dire que **la fonction $f$ est strictement décroissante sur l'intervalle I** signifie que, pour deux nombres a et b de l'intervalle I, **si a < b alors $f$ (a) > $f$ (b)**

| |
|---|
| $f$ est croissante signifie que pour deux nombres a et b de l'intervalle I, **si a < b alors $f$ (a) $\leqslant$ $f$ (b)**<br>$f$ est décroissante signifie que pour deux nombres a et b de l'intervalle I, **si a < b alors $f$ (a) $\geqslant$ $f$ (b)** |

Ex :




la fonction $f$ ci-dessus est **strictement décroissante** sur [–5;-2]

la fonction $f$ ci-dessus est **strictement croissante** sur [–2;3]

| |
|---|
| la fonction $f$ est décroissante sur [3;6]. Je n'emploie pas le mot "strictement" sur cet intervalle ! |

**définition :**

le **maximum M** de $f$ sur l' intervalle I est la plus grande valeur prise par $f(x)$ sur cet intervalle. On a alors pour tout x de I, $f(x) \leqslant$ M

Ex :

la fonction f ci-dessus a pour maximum 6 sur l'intervalle [–5;8]. Il est atteint pour $x = 3$

le **minimum m** de $f$ sur l' intervalle I est la plus grande valeur prise par $f(x)$ sur cet intervalle. On a alors pour tout x de I, $f(x) \geqslant$ M

Ex :

la fonction $f$ ci-dessus a pour minimum –2 sur l'intervalle [–5;8].
Il est atteint pour $x = 6$

| |
|---|
| un **extremum** est un maximum ou un minimum ! |

**un tableau de variations résume les variations d'une fonction :**

Voici le tableau de variations de la fonction précédente

| $x$ | –5 | | –2 | | 3 | | 6 | | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 4 | ↘ | 2 | ↗ | 6 | ↘ | –2 | ↗ | 1 |

la flèche est "descendante", la fonction est décroissante entre –5 et –2 !

le point de coordonnées (3;6) est le plus "haut" de la courbe. 6 est le maximum de la fonction sur [–5;8]

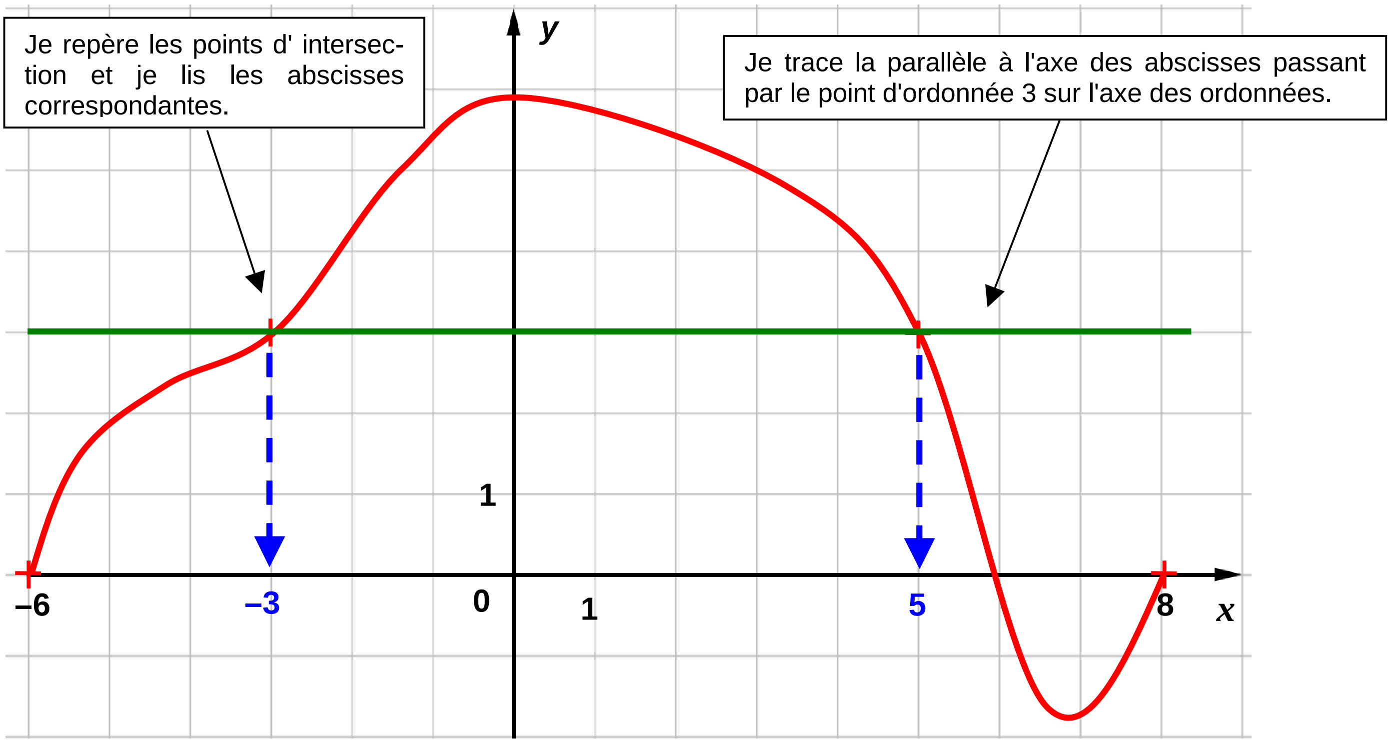
le point de coordonnées (6;–2) est le plus "bas" de la courbe. –2 est le minimum de la fonction sur [–5;8]

## IV) Résolution graphique d'équations et d'inéquations :

Soit $f$ une fonction et D son ensemble de définition.

**définition (rappel)** :
**Résoudre une équation (ou une inéquation)** revient à trouver **toutes les solutions** pour lesquelles **l'égalité** (ou **l'inégalité**) est vraie.
On peut résoudre graphiquement des équations ou des inéquations.

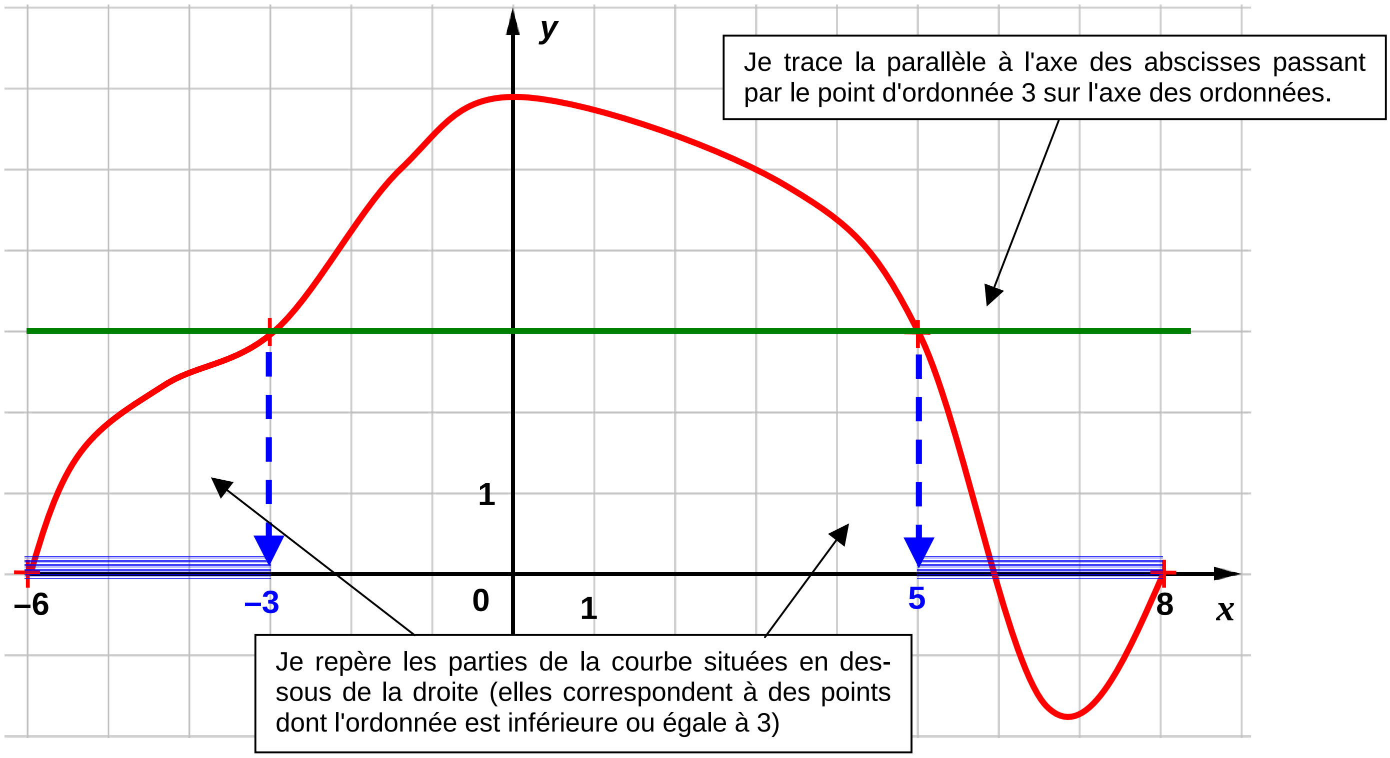
Ex : Voici la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle [-6;8]
Résolvons graphiquement l'équation $f(x) = 3$




Les abscisses des points correspondants sont –3 et 5
L'équation $f(x) = 3$ a donc deux solutions : **–3** et **5**

Ex : Voici la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle [-6;8]

Résolvons graphiquement l' inéquation $f(x) \leqslant 3$




Les solutions de l'inéquation se lisent sur l'axe des abscisses.
Ce sont tous les nombres de l'intervalle [–6;3] **ou** de l'intervalle [5;8]
L'ensemble des solutions de l'inéquations est S = [–6;–3] ∪ [5;8]

| |
|---|
| $f(x) \leqslant 3$ sur [–6;8] pour $x \in$ [–6;–3] ∪ [5;8]  ∪ se lit "union" |

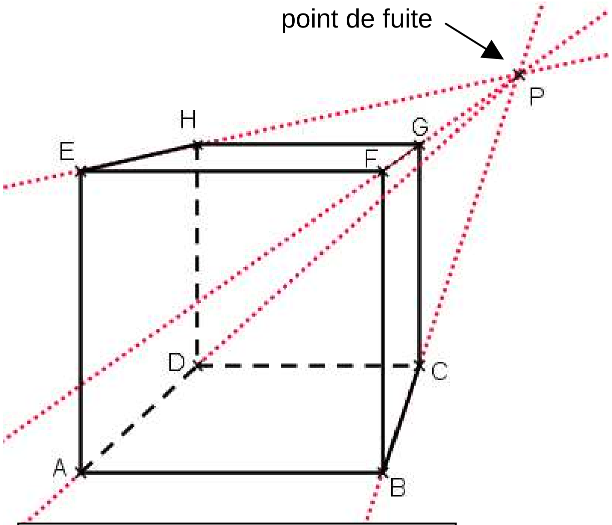
# Géométrie dans l'espace

## I) La perspective cavalière :

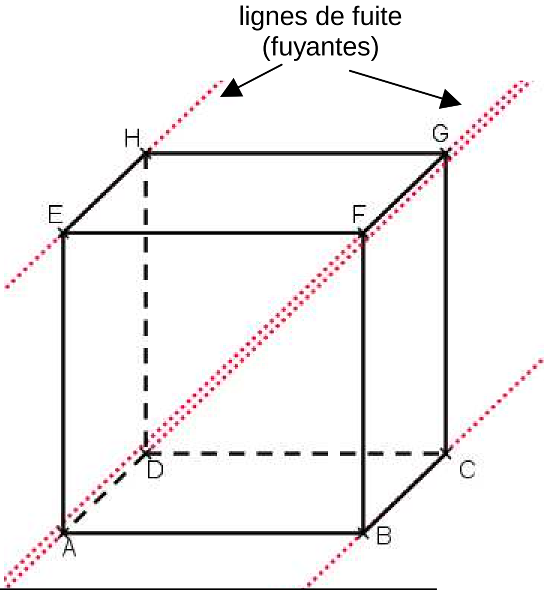
### a) notion de perspective :

La perspective est une technique de représentation des solides sur une surface plane.

Ex :




représentation d'un cube en **perspective à un point de fuite**




représentation d'un cube en **perspective cavalière**

la perspective cavalière donne une meilleure idée de la forme réelle du cube dans l'espace!

### b) perspective cavalière :

**règles de construction d'un solide en perspective cavalière** :

► les éléments **cachés** sont tracés **en pointillés**, les éléments visibles sont en trait plein.

► les éléments situés dans **un plan vu de face** (**frontal**) sont représentés **en vraie grandeur**.

► les **droites perpendiculaires au plan frontal** sont représentées par des droites parallèles **formant un angle (de fuite) avec l'horizontale**.

► **les longueurs représentées dans la direction des fuyantes** ne sont pas les longueurs réelles (**on les réduit par un coefficient de réduction en général 0,5 ou 0,7**).

**propriétés** :

► deux **droites parallèles** sont représentées par deux droites **parallèles**.

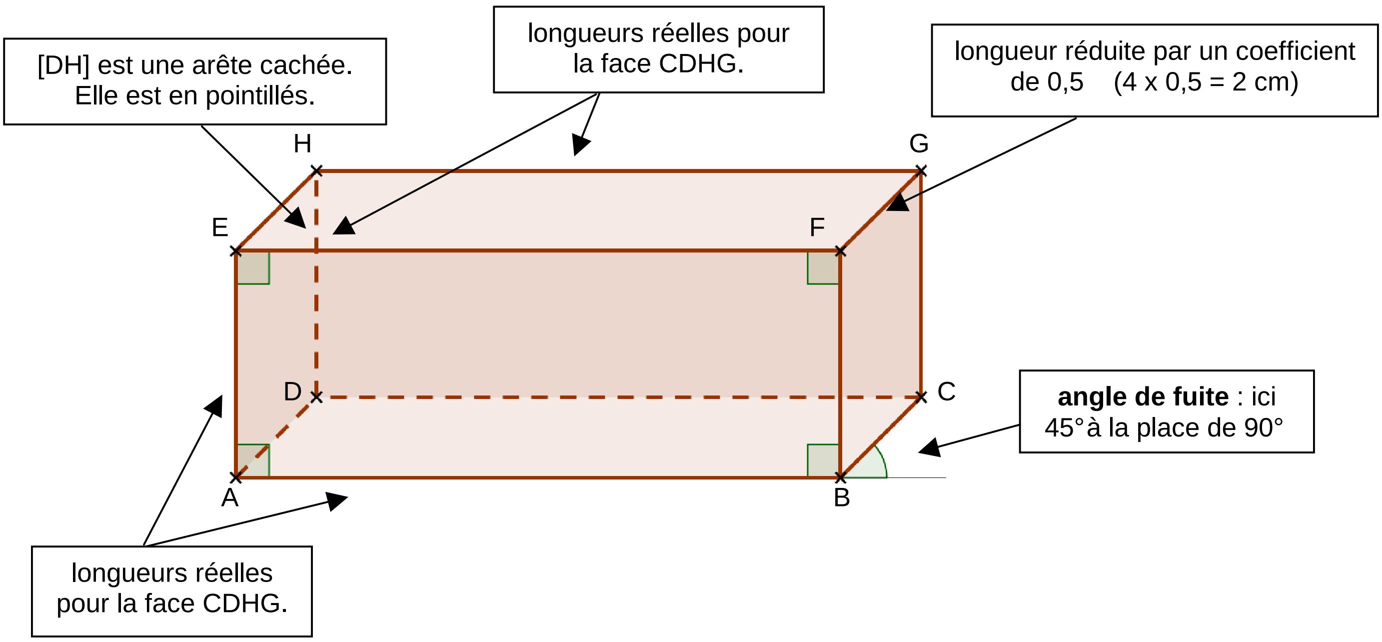
► deux **droites sécantes** sont représentées par deux droites **sécantes**.

► des **points alignés** sont représentés par des points **alignés**.

► les **milieux de segments** sont **conservés**.

Ex : Représentation en perspective cavalière d'un parallélépipède rectangle

ABCDEFGH tel que AB = 8cm BF=4cm EH = 3cm



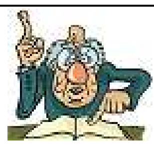

## II) Positions relatives de droites et plans :

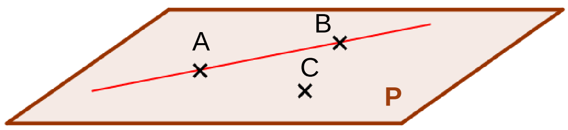
rappel : On peut imaginer un plan comme une feuille d'épaisseur nulle qui s'étend à l'infini.
Nous représenterons dans l'espace un plan P ainsi **:**


### a) règles d'incidence *(admises)* :

- Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer **tous les théorèmes de géométrie plane** (Pythagore, Thalès, etc..)
- Par **deux points distincts** de l'espace passe **une droite et une seule notée (AB)**
- Par **trois points non alignés A, B, C** il passe un **unique plan noté (ABC)**
- Si deux points distincts **A et B appartiennent à un plan P** alors la droite **(AB) est contenue dans le plan P**.

(AB) est la droite unique passant par A et B !
Le plan P peut également être nommé (ABC) !





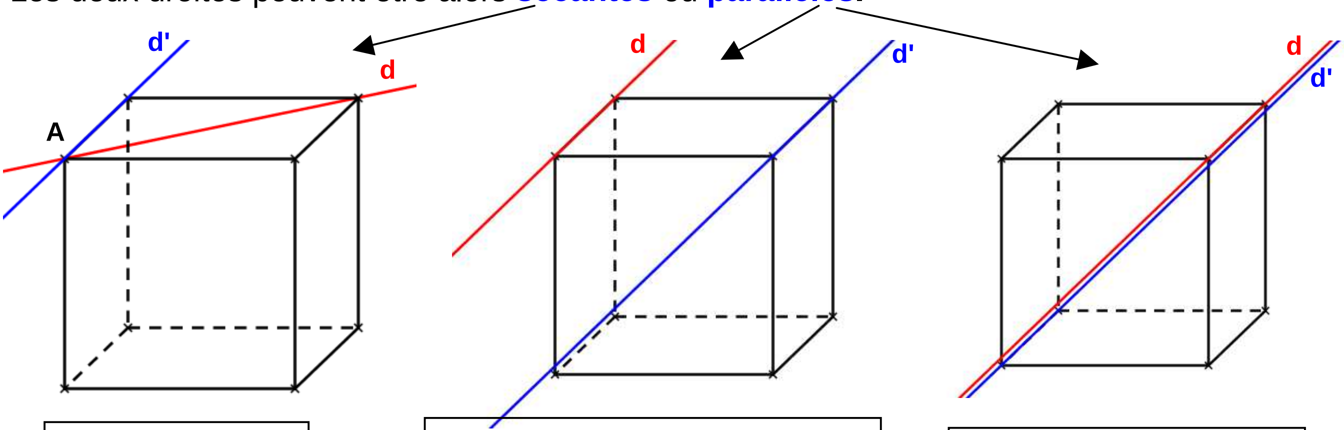

### b) positions relatives de deux droites :

**propriété (admise) :**

Dans l'espace, deux droites sont :

- soit **coplanaires** (elles sont contenues **dans un même plan**)

Les deux droites peuvent être alors **sécantes** ou **parallèles**.



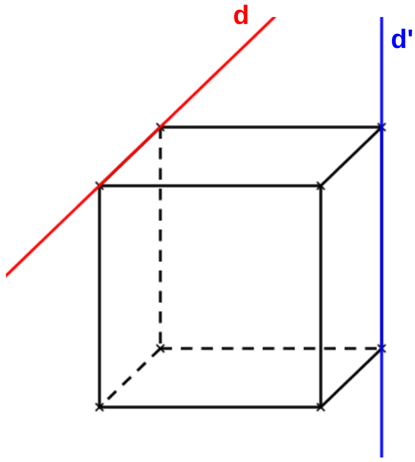

d et d' ont un point d' intersection A

d et d' sont **strictement parallèles** (pas de point d' intersection)

d et d' sont **confondues**

- soit **non coplanaires** (elles ne **pas** contenues **dans le même plan**)

d et d' ne sont pas coplanaires (pas de point commun)



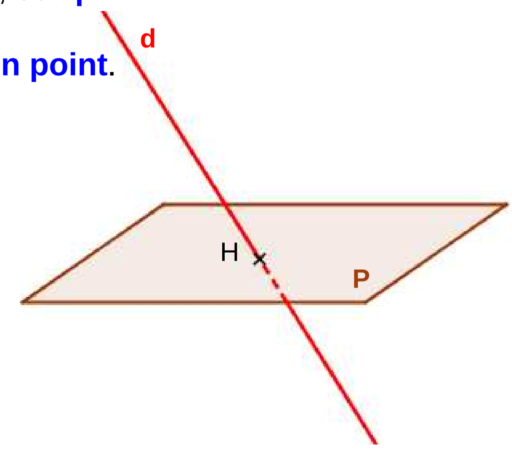

## c) positions relatives d'une droite et d'un plan :

**propriété (admise) :**

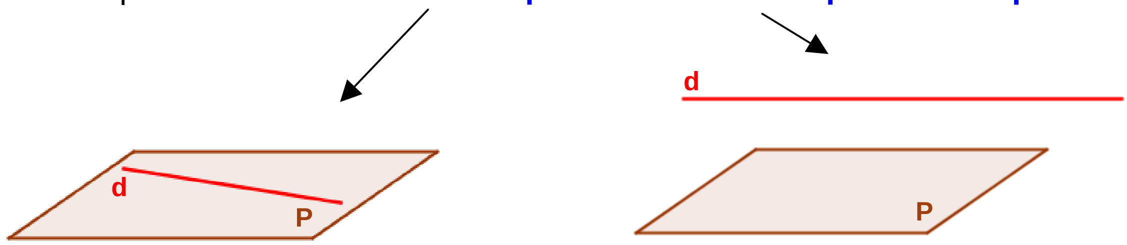
Dans l'espace, un plan et une droite sont soit **sécants**, soit **parallèles**

- quand ils sont **sécants**, leur **intersection est un point**.

d coupe le plan P en H



- quand ils sont **parallèles**,
  **la droite** peut être **contenue dans le plan** ou **strictement parallèle au plan** .

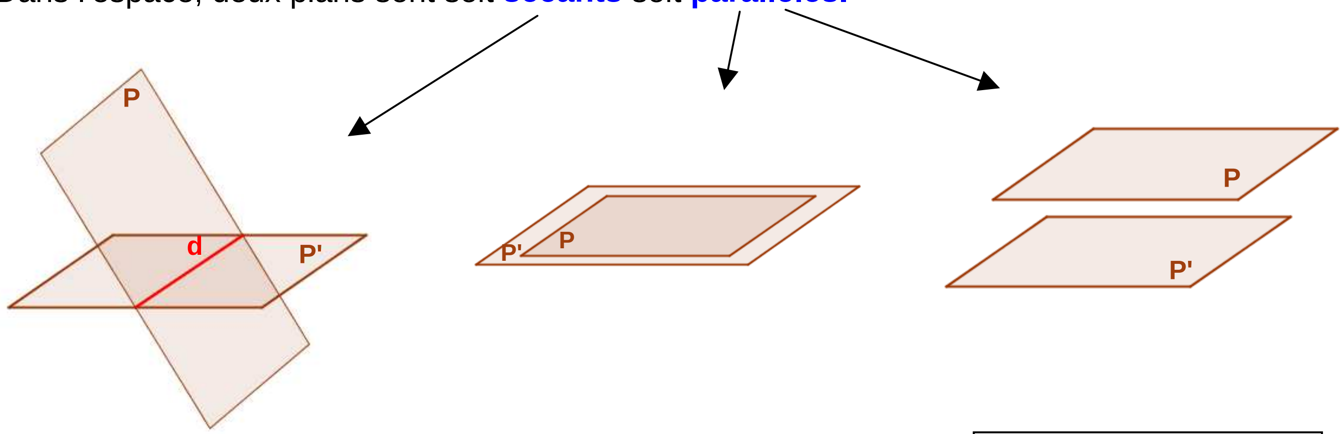



d // P

d) positions relatives de deux plans :

**propriété (admise) :**

Dans l'espace, deux plans sont soit **sécants** soit **parallèles.**



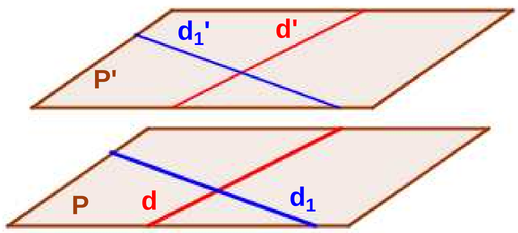

| P et P' sont sécants selon la droite d | P et P' sont confondus | P et P' sont strictement parallèles |
|---|---|---|

## III) Parallélisme (propriétés admises) :

a) montrer que deux plans sont parallèles :

**propriété :** Si un plan P contient **deux droites sécantes parallèles** à **deux droites sécantes d'un plan P'** alors **P est parallèle à P'**

d et $d_1$ sont incluses dans P
d' et $d_1$' sont incluses dans P'
d //d' et $d_1$ // $d_1$'
**donc P et P' sont parallèles**



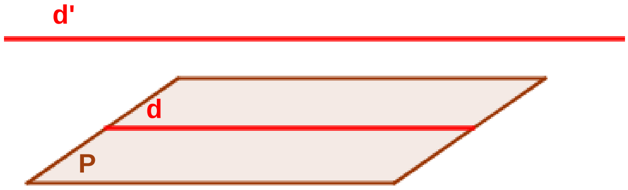

**propriété :** Si **deux plans sont parallèles**, **tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre**

b) <u>montrer qu'une droite est parallèle à un plan :</u>

**<u>propriété :</u>** Si **une droite d' est parallèle à une droite d d'un plan P**, alors **la droite d' est parallèle au plan P**

d est incluse dans le plan P
d' // d

**donc d' est parallèle à P**

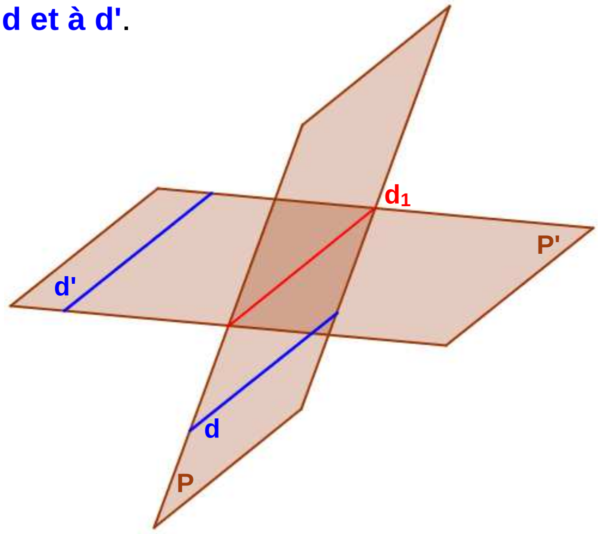



b) <u>montrer que deux droites sont parallèles :</u>

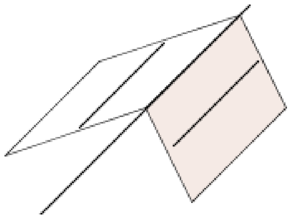
**<u>propriété (théorème du «toit»):</u>** Soient deux droites **d et d' parallèles**. **P est un plan contenant d** et **P' un plan contenant d'**. Si **les plans P et P' sont sécants**, **alors leur intersection est une droite parallèle à d et à d'**.

P et P' sont deux plans sécants selon $\mathbf{d_1}$
d est incluse dans le plan P
d' est incluse dans le plan P'
d' // d

**donc $\mathbf{d_1}$ est parallèle à d et à d'**



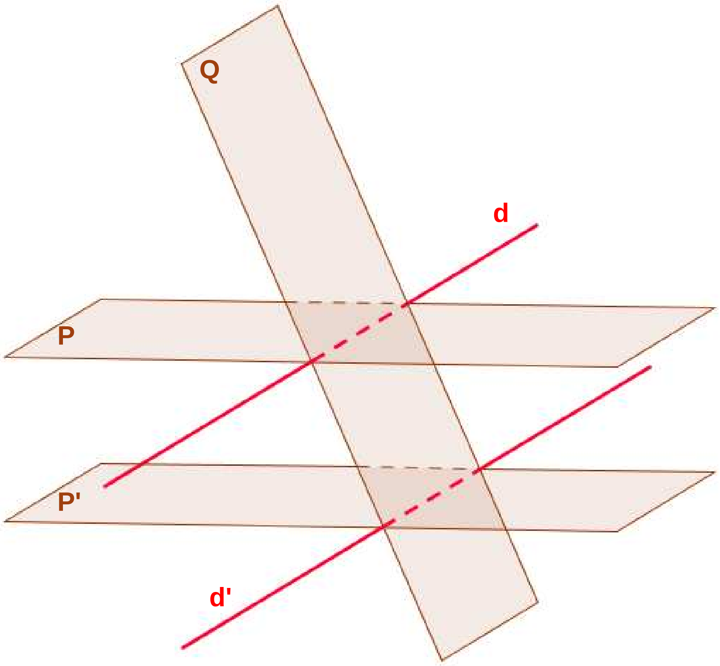

Cette propriété est le **"théorème du toit"** !



**<u>propriété :</u>** Si **deux plans sont parallèles**, alors **tout plan coupant l'un coupe aussi l'autre et les droites d'intersections sont parallèles**.

P et P' sont deux plans parallèles
Q et P sont deux plans sécants selon d
Q et P' sont deux plans sécants selon d'

**donc d et d' sont parallèles**



# Probabilités

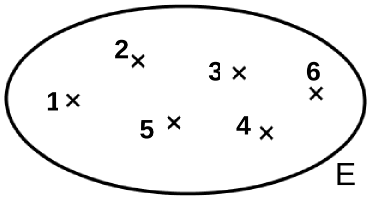
## I) Expériences aléatoires et évènements :

**définition :** Une **expérience aléatoire** est une expérience ayant plusieurs **issues** (ou **résultats**) dont on **ne peut pas prévoir ni calculer de façon certaine laquelle de ces issues sera réalisée**.

Pour **définir** une expérience aléatoire, on précise son **déroulement** et l'ensemble **E de toutes les issues possibles.**

Ex : On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 et on note le numéro porté par la face supérieure.

L' ensemble E de toutes les issues possibles s'écrit




**E = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }**

E est appelé l'**univers** de l'expérience.

on représentera parfois un ensemble en utilisant ce type de diagramme.

**définition :** Un **évènement A** est **une partie de l'univers E.**

Ex : Reprenons l'exemple précédent.
Définissons un évènement A par l' expression : **« le numéro obtenu est pair »**
Cet évènement A peut s'écrire sous forme d'une partie de E :
**A = { 2 ; 4 ; 6 }**.

**l'issue 2 réalise l'évènement A** car l'issue 2 est dans l'ensemble A.

**définitions :**

- l'**évènement contraire** d'un évènement A est la partie constituée de toutes les **issues** de E **qui ne sont pas dans A**. On le note $\overline{A}$ .
- un évènement **élémentaire** est une partie de E ne contenant q' **une seule issue**.
- **E** est appelé l'**évènement certain**.
- ∅ est l'**évènement impossible**, il n'y a pas d'issue possible.

Ex : Reprenons l'exemple précédent.
$\overline{A}$ = { 1 ; 3 ; 5 } est l'évènement **contraire** de A ← $\overline{A}$ : **« le numéro obtenu est impair »**

l'évènement B tel que **B= { 4 }** est **élémentaire** ← **B : « le numéro obtenu est 4 »**

**E** est l'évènement **certain** ← **E : « le numéro obtenu est compris entre 1 et 6»**

∅ est l'évènement **impossible** ← **∅ : « le numéro obtenu est 24 »**

## II) Probabilité d'un évènement :

rappel : Si on effectue **un très grand nombre de fois une expérience aléatoire**, la **fréquence de réalisation d'un événement** se stabilise autour d'un nombre : **la probabilité de cet événement**.
Exemple : Je jette un très grande nombre de fois une pièce sur le sol. On constate que le nombre de "pile" obtenu est sensiblement égal au nombre de "face". J'ai autant de chances d'obtenir "face" que "pile". La probabilité de **l'événement A : "obtenir pile"** est de 50% soit **0,5.** On écrit **p(A) = 0,5**

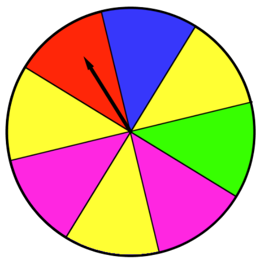
En généralisant, supposons une expérience aléatoire ayant un nombre d' issues **n**.
Les issues seront notées $e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots e_n$
L'univers E de l'expérience sera $E = \{ e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots e_n \}$

### a) loi de probabilité :

**définition :** Une **loi de probabilité** est définie par un ensemble E constitué d'éléments appelés **issues et des probabilités correspondantes**.
Chaque **probabilité** est un **nombre positif** et la **somme de toutes les probabilités** est égale à **1**. On peut la définir sous forme de tableau.

| **issues** | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | .... | $e_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **probabilités** | $p(e_1)$ | $p(e_2)$ | $p(e_3)$ | .... | $p(e_n)$ |

Ex : On lance la roue de loterie ci-contre et on observe la couleur désignée.
On peut associer à ce jeu la loi de probabilité suivante :



| **issues** | rouge | bleu | jaune | violet | vert |
|---|---|---|---|---|---|
| **probabilités** | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |

**définition :** La **probabilité d'un événement** est **la somme des probabilités des évènements élémentaires** qu' il comprend.

Ex : Reprenons l'expérience précédente.
Considérons l'évènement **F** défini par **« la couleur obtenue est rouge ou jaune»**

La probabilité de l'événement F est $\mathbf{p(F)} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Dans notre loi de probabilité, la somme des probabilités est bien égale à 1
$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = \mathbf{1}$$

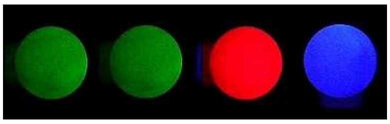
**remarques :**

- la probabilité de l'événement certain est 1 **p(E) = 1**
- la probabilité de l'événement impossible est 0 **p(∅) = 0**
- la probabilité de tout événement A est comprise entre 0 et 1 $\mathbf{0 \leqslant p(A) \leqslant 1}$

## b) cas d'une expérience comportant plusieurs épreuves :

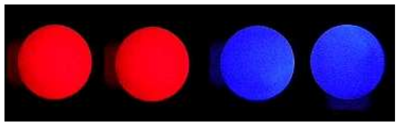
Ex : Une expérience aléatoire est composée des trois épreuves suivantes :

1. on tire au hasard une boule dans un premier sac et on note la couleur
2. on recommence avec un deuxième sac
3. on tire enfin une dernière boule dans le troisième sac



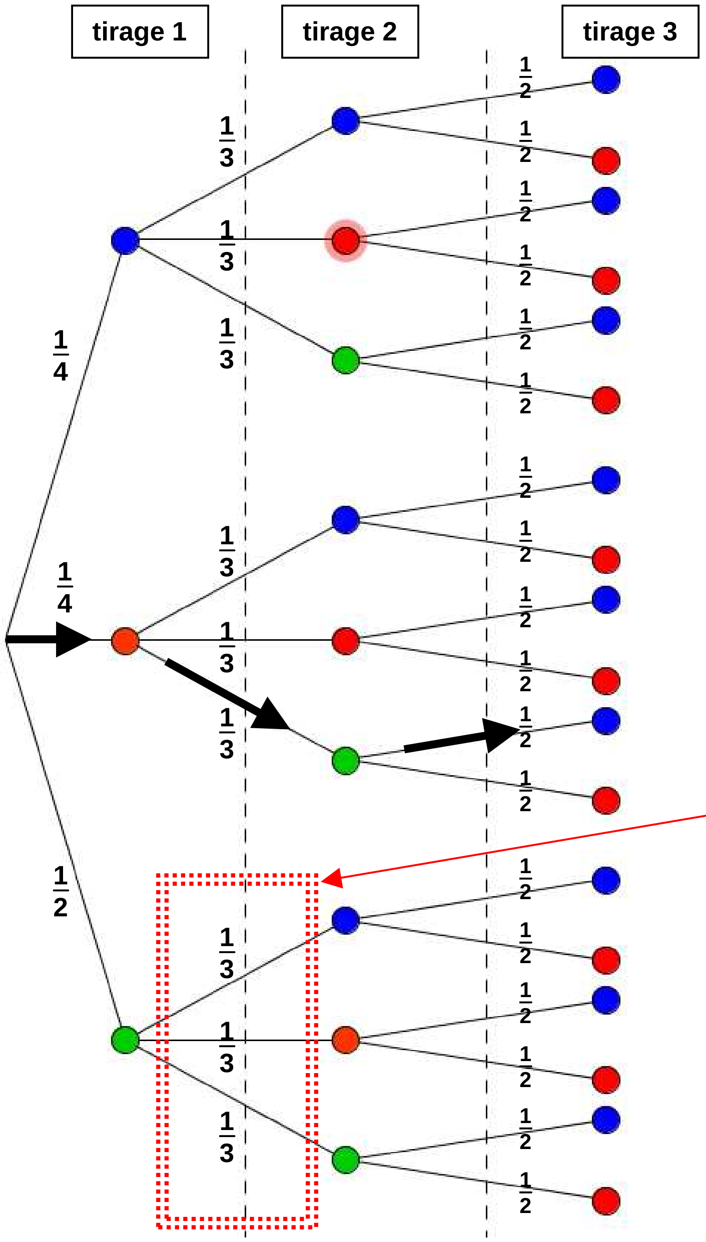
sac 1
2 vertes, 1 rouge, 1 bleue

sac 2
1 verte, 1 bleue, 1 rouge



sac 3
2 rouges, 2 bleues

On range ensuite les trois boules par ordre de tirage dans une boîte. Pour connaître les probabilités d'obtenir tel ou tel ordonnancement de couleur, on peut utiliser **un arbre pondéré**.


**propriété** : la probabilité d'un évènement est le **produit des probabilités** rencontrées sur le "chemin" conduisant à cet événement.

Ex : La probabilité d'obtenir l'ordonnancement **rouge**, **vert**, **bleu** est obtenue ainsi :

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

**propriété** : la **somme des probabilités** de toutes les **branches issues d'un même nœud** est égal à 1.

Ex : Observez la zone entourée de pointillés rouges. La somme des probabilités de chaque branche est : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \mathbf{1}$

c) <u>cas d'événements élémentaires (issues) équiprobables :</u>

**<u>définition :</u>** On a une situation d'équiprobabilité quand **les issues** (événements élémentaires) ont la **même probabilité**

on peut dire aussi que la loi de probabilité est **équirépartie** !

<u>Ex :</u> On tire au hasard une boule dans le sac ci-contre et on note la couleur obtenue.

sac
1 verte, 1 bleue, 1 rouge

L'univers E est E = {rouge, vert, bleu}

La probabilité de chaque issue est $\mathbf{\frac{1}{3}}$

**p(rouge) = p(vert) = p(bleu) =** $\mathbf{\frac{1}{3}}$

**<u>propriété</u>** <u>:</u> En cas d'équiprobabilité des issues, la probabilité d'un évènement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'}\textbf{issues de A}}{\text{nombre }\textbf{total d'issues}}$$

dans le cas d'une loi de probabilité équirépartie (issues équiprobables) on a :$\mathbf{p(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}}$

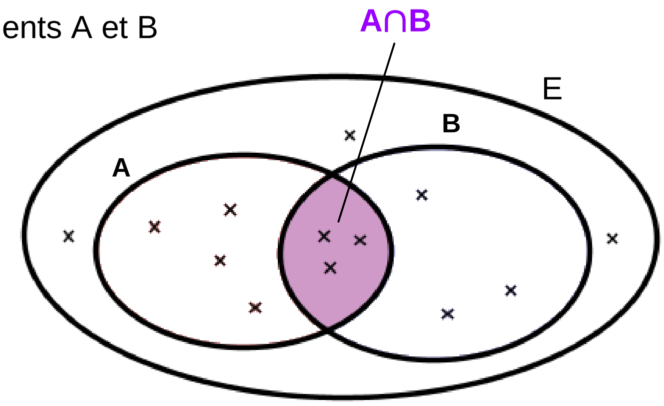
<u>Ex :</u> On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 et on note le numéro porté par la face supérieure.
Soit l'événement A : « le numéro obtenu est impair »
On a l'univers E = {1; 2; 3; 4; 5; 6} A = {1; 3; 5}

La situation est une **situation d'équiprobabilité**. On a donc :

$$\mathbf{p(A)} = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

## III) <u>Calculs de probabilités :</u>

a) <u>intersection et réunion :</u> Soient deux événements A et B

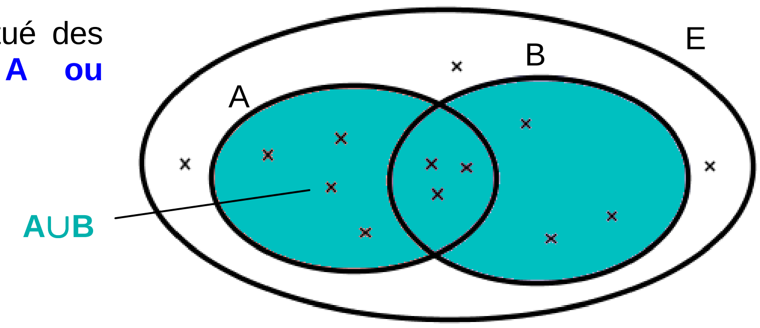



**<u>définitions</u>** <u>:</u>

- L'événement "**A et B**" est constitué des issues réalisant à la fois **l'événement A et l'événement B**.

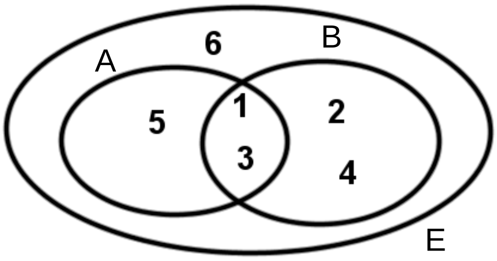
On le note : **A∩B** **"A inter B"**

- L'événement "**A ou B**" est constitué des issues réalisant **l'événement A ou l'événement B**.




On le note : **A∪B** **"A union B"**

Ex : Reprenons l'expérience précédente avec le dé.
Considérons les événements A et B
A : « le numéro obtenu est impair »
B : « le numéro obtenu est inférieur ou égal à 4 »




A = {1; 3; 5}     B = {1; 2; 3; 4}

L'intersection de A et B, **A∩B = {1; 3}**
A∩B : « le numéro obtenu est impair **et** inférieur ou égal à 4 »

La réunion de A et B, **A∪B = {1; 2; 3; 4; 5}**
A∪B : « le numéro obtenu est impair **ou** inférieur ou égal à 4 »

**propriété** : Quels que soient les événements A et B :

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$$

► ***démonstration***
Faisons la démonstration dans le cas particulier précédent.
Dans le cas général, on procéderait de la même façon.
on a donc : A = {1; 3; 5}  B = {1; 2; 3; 4}  A∩B = {1; 3}  A∪B = {1; 2; 3; 4; 5}

$$p(A) + p(B) = [p(1) + p(3) + p(5)] + [p(1) + p(2) + p(3) + p(4)]$$

$$= [p(1) + p(3)] + [p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5)]$$

$$= p(A \cap B) + p(A \cup B)$$

## b) événements incompatibles :

**définition** : Deux événements A et B sont **incompatibles** quand leur intersection est vide.

| ils ne peuvent se produire tous deux pendant la même expérience ! |
|---|

Ex : Reprenons l'expérience précédente avec le dé.
Considérons les événements A et B
A : « le numéro obtenu est impair »  A = {1; 3; 5}
B : « le numéro obtenu est pair »  B = {2; 4; 6}
A∩B : « le numéro obtenu est pair **et** impair»  A∩B = ∅
Les événements A et B sont **incompatibles**.

**propriété** : Si deux événements A et B sont incompatibles, alors

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

► ***démonstration***

Cette propriété est la conséquence de la propriété précédente.
Soient deux événements A et B incompatibles, on a par définition :

$A \cap B = \varnothing$

donc, $p(A \cap B) = p(\varnothing) = 0$

or, d'après la propriété précédente, $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$

par suite, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

c) probabilité de l' événement contraire :

**propriété** : Pour deux événements contraires A et $\bar{A}$ **,**

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

► ***démonstration***

Par définition, l'événement contraire de A est constitué de toutes les issues de l'univers E n'appartenant pas à A. De plus, les événements A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

donc, $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \varnothing$

or, $p(A \cup \bar{A}) + p(A \cap \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$ (propriété du paragraphe a)

donc, $p(E) + 0 = p(A) + p(\bar{A})$

donc, $p(A) + p(\bar{A}) = p(E) = 1$

# Repères dans le plan - configurations planes

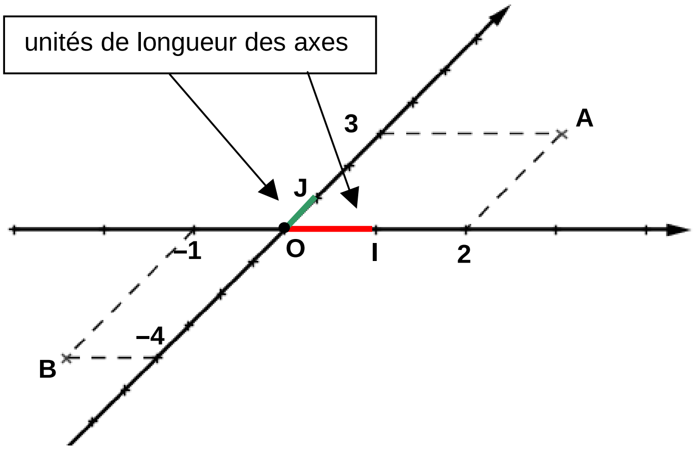
## I) Repères dans le plan :

### a) notion de repère dans un plan :

**Définition :** Un repère est constitué **d'un point origine**, de **deux droites orientées et graduées** (axes).

Dans le repère (O; I; J) ci-contre,

- **O** est **l'origine du repère**
- **(OI)** est **l'axe des abscisses**
- **(OJ)** est **l'axe des ordonnées**



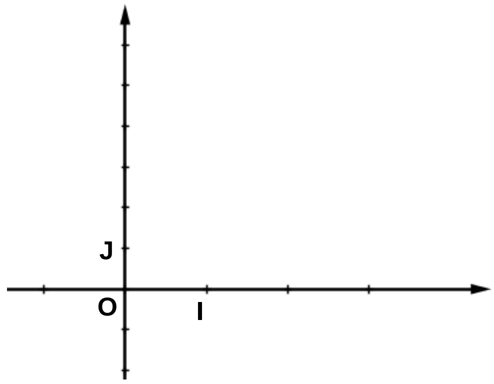

un point est repéré par un couple de nombres appelées **coordonnées** :
- l'abscisse (lue sur la droite graduée (OI)
- l'ordonnée (lue sur la droite (OJ)

Ex : Dans le repère ci-dessus le couple de coordonnées de A est (2;3)
On peut écrire **A : (2;3)** **B: (–1; –4)**

| |
|---|
| Pour obtenir l'abscisse A, je trace la parallèle à (OJ) passant par A. Pour obtenir l'ordonnée, je trace la parallèle à (OI) passant par A.<br>Dans un couple de nombres, l'ordre a de l'importance. J'écris en premier l'abscisse ! |

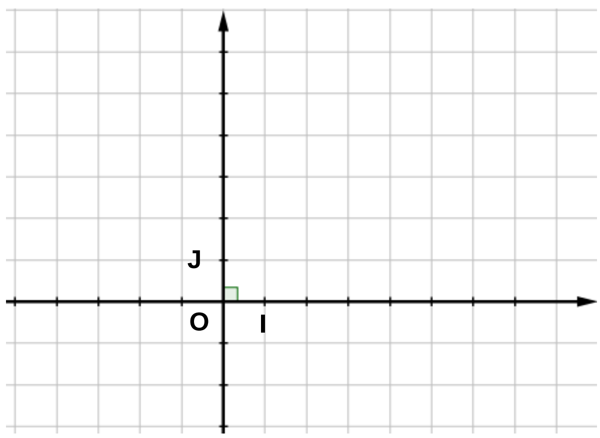
### b) repère orthogonal - repère orthonormé :

**définition :** Un **repère orthogonal** est un repère du plan (O;I,J) tel que **(OI)⊥(OJ)**




**définition :** Un **repère orthonormé** est un repère du plan (O;I,J) tel que
**(OI)⊥(OJ) et OI=OJ**

| |
|---|
| Le repère est orthogonal et les axes ont la même unité de longueur ! |



c) coordonnées du milieu d'un segment :

**propriété (admise) :** Soient dans un repère quelconque du plan deux points; A:($x_A$; $y_A$) et B:( $x_B$; $y_B$)
Les **coordonnées du milieu** I:($x_I$;$y_I$) du segment [AB] sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

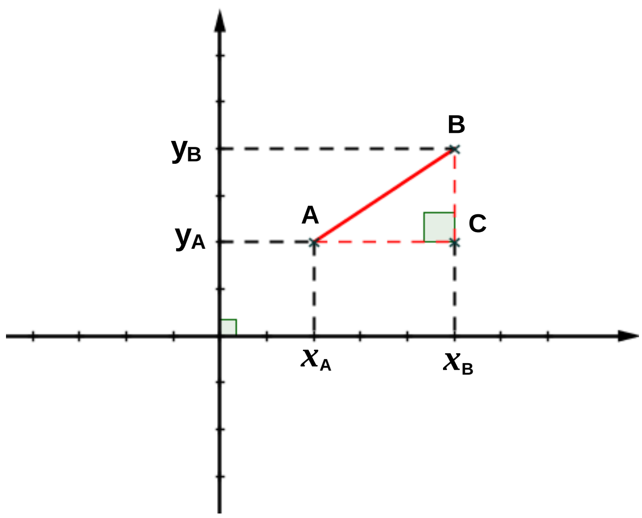
## II) Distance entre deux points :

**propriété :** Dans un repère orthonormé, la distance AB entre deux points A:($x_A$; $y_A$) et B:( $x_B$; $y_B$) est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

► ***démonstration***

Soient deux points A:($x_A$; $y_A$) et B:( $x_B$; $y_B$) dans un repère orthonormé (O;I;J)
On place le point C ($x_B$; $y_A$) tel que **ABC soit un triangle rectangle**.




- Si $x_B > x_A$ alors AC = $x_B - x_A$
- Si $x_B < x_A$ alors AC = $x_A - x_B$

dans les deux cas, $\mathbf{AC^2 = (x_B - x_A)^2}$

De la même façon, on a $\mathbf{BC^2 = (y_B - y_A)^2}$

D'après **le théorème de Pythagore** dans le triangle rectangle ABC, on a :

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

donc $\mathbf{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

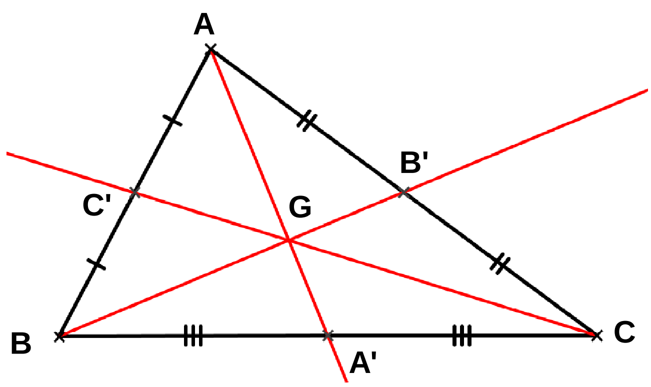
## III) Configurations du plan :

a) les triangles :

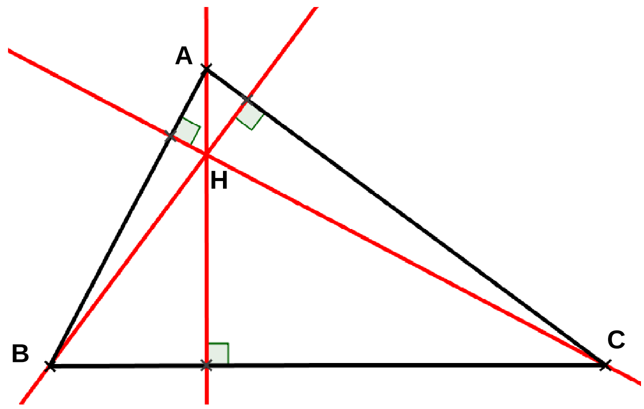
**propriétés s'appliquant à tous les triangles :**

► les **médianes sont concourantes en un point G** appelé **centre de gravité du triangle**. G est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet dont elle est issue

$AG = \frac{2}{3}AA'$ $\qquad BG = \frac{2}{3}BB'$ $\qquad AG = \frac{2}{3}CC'$

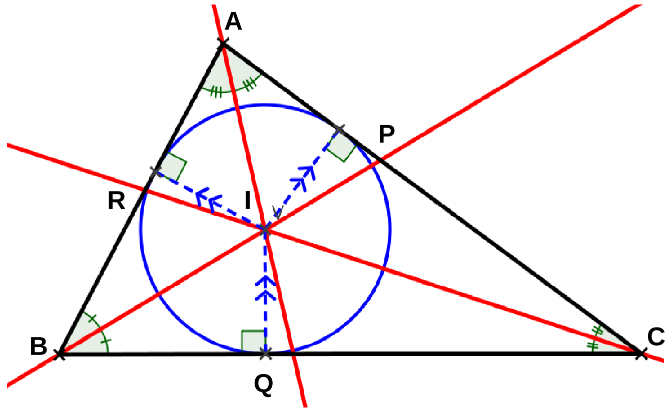


► les **hauteurs sont concourantes en un point H** appelé **orthocentre du triangle**.

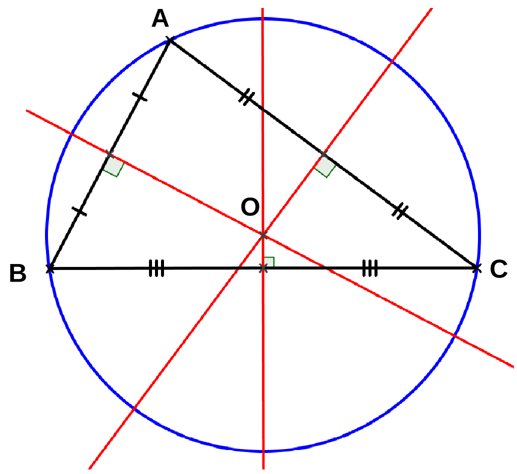



► les **bissectrices sont concourantes** en un point **I équidistant des côtés du triangle**. I est le **centre du cercle inscrit dans le triangle.**

IP = IQ = IR




► les **médiatrices sont concourantes** en un point **O équidistant des sommets du triangle. O** est le **centre du cercle circonscrit au triangle**.

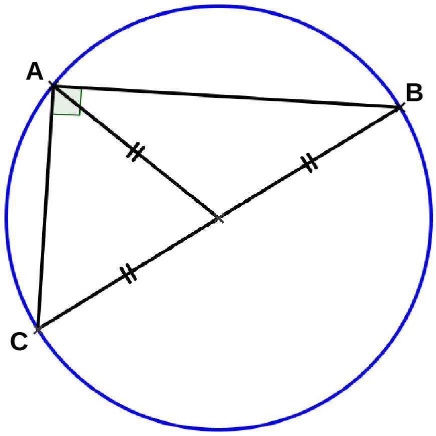



**<u>Propriétés s'appliquant au triangle rectangle :</u>**

► Si un triangle ABC est rectangle en A alors l'**hypoténuse** [BC] est **un diamètre** du cercle circonscrit

***la réciproque est vraie***

Si **un diamètre du cercle circonscrit** à un triangle ABC est un côté [BC] du triangle, alors **ce triangle est rectangle** en A.



► Si un triangle ABC est rectangle en A alors **le centre O** du cercle circonscrit est le **milieu de l'hypoténuse** [BC]

***la réciproque est vraie***

Si le **centre du cercle circonscrit** à un triangle ABC est le **milieu d'un de ses côtés** [BC] alors **ce triangle est rectangle en A**

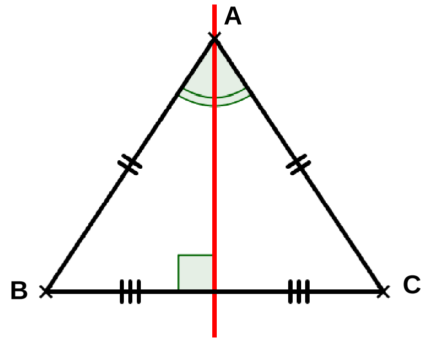
► Si un triangle ABC est rectangle en A alors la **médiane issue de A** a pour **longueur la moitié de celle de l'hypoténuse**

***la réciproque est vraie***

Si la médiane relative à un côté d' un triangle a **pour longueur la moitié de ce côté** alors **ce triangle est rectangle**. Ce côté est l'hypoténuse du triangle rectangle.

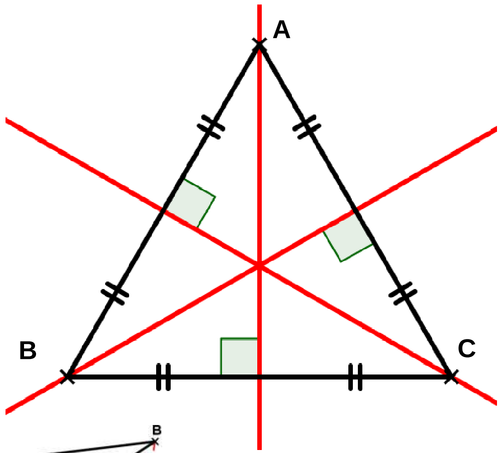
**<u>Propriété s'appliquant au triangle isocèle :</u>**

► Un **triangle isocèle** de sommet principal A possède **un axe de symétrie** : la **médiane issue de A** qui est aussi **la médiatrice relative à [BC]**, la **hauteur issue de A**, **la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$**.



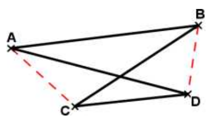

**<u>Propriété s'appliquant au triangle équilatéral :</u>**

► Un **triangle équilatéral** possède **3 axes de symétrie** : les **médiatrices de ses côtés**.
L'**orthocentre**, le **centre de gravité**, le **centre du cercle circonscrit**, le **centre du cercle inscrit** sont **confondus**.




b) <u>les quadrilatères :</u>

| |
|---|
| ***rappel*** : voici un quadrilatère croisé ABCD ! (diagonales en pointillés rouge) |




► Pour **démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme**, il suffit de :

- **<u>montrer que les côtés opposés sont parallèles</u>**

(AB)//(CD) et (AD)//(BC)

**OU**

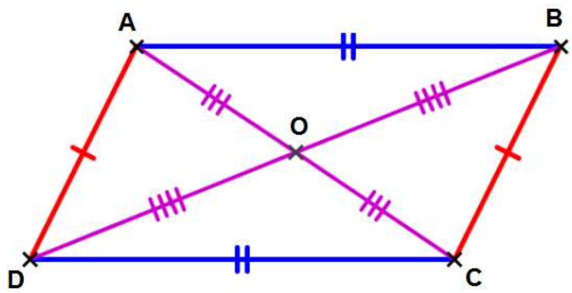
- **<u>qu'il est non croisé et possède deux côtés opposés parallèles et de même longueur</u>**

(AB) // (CD) et AB = CD

**OU**

- **<u>que les diagonales ont le même milieu O</u>**

OA = OC et OB = OD



► Pour **démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle**, il suffit de :

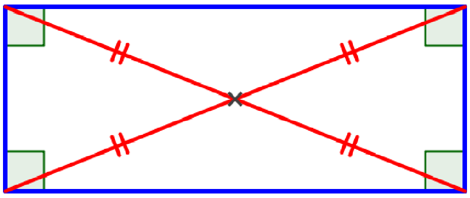
- **<u>montrer qu'il possède 3 angles droits</u>**

**OU**

- **<u>qu'il est un parallélogramme ayant un angle droit</u>**

**OU**

- **<u>que les diagonales ont la même longueur et se coupent en leur milieu</u>**



► Pour **démontrer qu'un quadrilatère est un losange**, il suffit de :

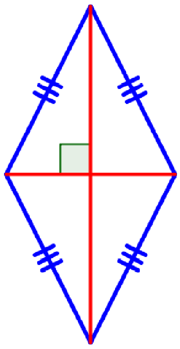
- **<u>montrer qu'il possède 4 côtés de même longueur</u>**

**OU**

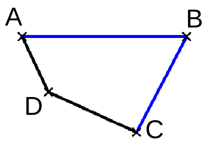
- **<u>qu'il est un parallélogramme possédant 2 côtés consécutifs égaux</u>**

**OU**

- **<u>qu'il est un parallélogramme possédant 2 diagonales perpendiculaires</u>**



***rappel*** : deux côtés **consécutifs** se "**suivent**". Ici, [AB] et [BC] sont deux côtés consécutifs du quadrilatère !



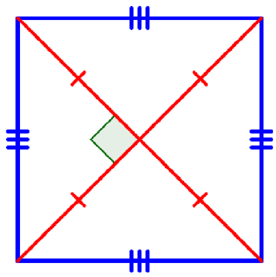

► Pour **démontrer qu'un quadrilatère est un carré**, il suffit de :

- **<u>qu'il est un parallélogramme possédant 2 côtés consécutifs perpendiculaires et égaux</u>**

**OU**

- **<u>qu'il est un parallélogramme possédant 2 diagonales perpendiculaires et de même longueur</u>**

Il suffit donc de montrer que le quadrilatère est **à la fois** un rectangle **et** un losange !



# Statistiques

**Rappels de vocabulaire :**

"Je suis pêcheur et je désire avoir des informations sur la taille des truites d'une rivière. Je décide de mesurer les 28 truites obtenues au cours des trois dernières semaines"

Voilà la liste des tailles obtenues arrondies au centimètre près :
22 - 24 - 25 - 23 - 25 - 25 - 24 - 24 - 24 - 17 - 20 - 23 - 23 - 25 - 24 - 17 - 24 - 25 - 23 - 18 - 20 - 22 - 24 - 25 - 20 - 23 - 24 - 25 -

Cette liste rassemble des **données**, il s'agit d' une **série statistique**.
La **population** choisie pour l'étude est l'ensemble des truites péchées.
Elle comprend 28 **individus**.
Le **caractère** étudié est la "taille" des truites. Il est **quantitatif** car il s'exprime par un nombre. Dans ce chapitre, nous utiliserons toujours des caractères quantitatifs (et non pas **qualitatifs** comme "la couleur des écailles" par exemple)
La série comprend 7 **valeurs** différentes : 17; 18; 20; 22; 23; 24; 25.
L'**effectif** total de la série est 28. L'effectif correspondant à la valeur 17 est 2.

## I) Présentation d'une série statistique:

Pour dépouiller les résultats d'une série, on regroupe les résultats dans un tableau précisant les effectifs de chaque valeur. Pour faciliter l'étude, on range les valeurs dans l'ordre croissant.

Ex : Tableau des effectifs

| **Taille (cm)** | 17 | 18 | 20 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectifs** | 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Une série peut aussi être définie par les fréquences de ses valeurs

Ex : Tableau des fréquences

| **Taille (cm)** | 17 | 18 | 20 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Fréquences** | $\frac{2}{28}$ $\approx 0,07$ | $\frac{1}{28}$ $\approx 0,04$ | $\frac{3}{28}$ $\approx 0,11$ | $\frac{4}{28}$ $\approx 0,14$ | $\frac{5}{28}$ $\approx 0,18$ | $\frac{6}{28}$ $\approx 0,21$ | $\frac{7}{28}$ $\approx 0,25$ |

7 truites sur 28 ont une taille de 25 cm. La proportion de truites ayant cette taille est donc de $\frac{7}{28}$. $\frac{7}{28}$ est la fréquence correspondant à la valeur 25 cm. La fréquence est ici de 0,25; on peut l'exprimer aussi en pourcentage soit 25%.

La **somme** des fréquences est toujours **égale à 1**.

## a) Effectifs cumulés croissants - Fréquences cumulées croissantes :

je souhaite connaître immédiatement le nombre de truites ou la fréquence correspondant à une taille inférieure ou égale à 22 cm. Il suffit d'ajouter tous les effectifs ou toutes les fréquences précédant cette valeur. C'est le principe des **e**ffectifs **c**umulés **c**roissants (**eec**) ou des **f**réquences **c**umulées **c**roissantes(**fcc**).

Ex : Tableau des effectifs et effectifs cumulés croissants

| **Taille (cm)** | 17 | 18 | 20 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectifs** | **2** | **1** | **3** | **4** | 5 | 6 | 7 |
| **Effectifs cumulés croissants (eec)** | 2 | 3 | 6 | **10** | 15 | 21 | 28 |

le nombre de truites de taille inférieure ou égale à 22 cm est 10

Ex : Tableau des fréquences et fréquences cumulées croissantes

| **Taille (cm)** | 17 | 18 | 20 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Fréquences** | ≈ 0,07 | ≈ 0,04 | ≈ 0,11 | ≈ 0,14 | ≈ 0,18 | ≈ 0,21 | ≈ 0,25 |
| **Fréquences cumulées croissantes (fcc)** | ≈ 0,07 | ≈ 0,11 | ≈ 0,22 | ≈ 0,36 | ≈ 0,54 | ≈ 0,75 | 1 |

la fréquence correspondant à une taille inférieure ou égale à 22 cm est 0,36.
36% des truites ont une taille inférieure ou égale à 22 cm.

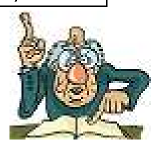
## b) Regroupements par classes :

Pour faciliter l'exploitation et la présentation de certaines séries, on peut regrouper les valeurs en classes.
Reprenons notre exemple avec les données brutes de départ (avant d'arrondir au cm)
22,2- 23,9 - 25,1 - 22,9 - 24,7 - 25,2 - 24,3 - 23,8 - 24,4 - 17,1 - 20,2 - 22,8 - 23,1 - 25,2 - 22,4 - 17,2 - 23,3 - 24,8 - 23,2 - 18 - 20,2 - 22,4 - 23,9 - 25,1 - 20,2 - 22,7 - 22 - 24,8 -

Dans le tableau ci-dessous, la série est regroupée en en classes d'**amplitude** 2cm

| **Taille (cm)** | [17;19[ | [19;21[ | [21;23[ | [23;25[ |
|---|---|---|---|---|
| **Effectifs** | 3 | 3 | 7 | 15 |
| **Fréquences** | ≈ 0,11 | ≈ 0,11 | ≈ 0,25 | ≈ 0,53 |

environ 53% des truites ont une taille comprise entre 20 et 25 cm !



## II) Paramètres d'une série statistique :

### a) Mesures de position (ou de tendance centrale) :

**définition** :

▶ La **moyenne** de la série statistique ci-contre est le nombre réel, noté $\overline{x}$, tel que :

| valeur $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_p$ |
|---|---|---|---|---|
| effectif $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | … | $n_p$ |

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots\ldots + n_px_p}{N}$$

N est l'effectif total de la série. $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$

▶ La moyenne peut se calculer à partir du tableau de fréquences :

| valeur $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_p$ |
|---|---|---|---|---|
| fréquence $f_i$ | $f_1$ | $f_2$ | … | $f_p$ |

$$\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots + f_px_p$$

Ex : Calculons la moyenne de notre exemple de départ.

| **Taille (cm)** | 17 | 18 | 20 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectifs** | 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **Fréquences** | ≈ 0,07 | ≈ 0,04 | ≈ 0,11 | ≈ 0,14 | ≈ 0,18 | ≈ 0,21 | ≈ 0,25 |

avec les effectifs :

$$\overline{x} = \frac{2 \times 17 + 1 \times 18 + 3 \times 20 + 4 \times 22 + 5 \times 23 + 6 \times 24 + 7 \times 25}{28} \approx \mathbf{22{,}6\ cm}$$

avec les fréquences :

$$\overline{x} = 17 \times 0{,}07 + 18 \times 0{,}04 + 20 \times 0{,}11 + 22 \times 0{,}14 + 23 \times 0{,}18 + 24 \times 0{,}21 + 25 \times 0{,}25$$
$$\approx \mathbf{22{,}6\ cm}$$

**définition** :

La **médiane** M d'une série statistique est le nombre tel que :

▶ 50% au moins des individus ont une valeur du caractère inférieure ou égale à M

▶ 50% au moins des individus ont une valeur du caractère supérieure ou égale à M

ce nombre permet de couper la population étudiée en deux groupes comprenant le même nombre d'individus !

Ex : Reprenons notre exemple en modifiant la population.

▶ population de 5 truites rangées dans l'ordre croissant des valeurs

| Taille (cm) | 17 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 1 | 2 |

L'effectif total est 5. Il s'agit d'un nombre impair. La médiane correspond donc à la taille de la 3ème truite. **La médiane est M = 18 cm**

▶ population de 6 truites rangées dans l'ordre croissant des valeurs.

| Taille (cm) | 17 | 18 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 1 | 1 | 2 |

L'effectif total est 6. Il s'agit d'un nombre pair. La médiane correspond donc à une taille comprise entre la 3ème et la 4ème truite. On prend en général la demi-somme.

**La médiane est** $M = \frac{18 + 20}{2} = 19$ **cm**

**Dans la pratique :**

Soit une série statistique d'effectif total N rangée dans l'ordre croissant des valeurs.

- Si N est impair, il s'écrit sous la forme $N = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$), alors M est la valeur située au rang $k+1$
- Si N est pair, il s'écrit sous la forme $N = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$), alors M est la demi-somme des valeurs situées au rang k et au rang $k+1$

Ex : Reprenons la situation de départ

| Taille (cm) | 17 | 18 | 20 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

L'effectif total est 28. Il s'agit d'un nombre pair : 28 = 2 x 14
M est la demi-somme des valeurs situées au rang 14 et 15.

**La médiane est** $M = \frac{23 + 23}{2} = 23$ **cm**

**définition :** Soit une série statistique d'effectif total N rangée dans l'ordre croissant des valeurs.
▶ **Le premier quartile $Q_1$** est la plus petite valeur $Q_1$ de la série telle **qu'au moins un quart** des valeurs de la liste **sont inférieures ou égales à $Q_1$**
▶ **Le troisième quartile $Q_3$** est la plus petite valeur $Q_3$ de la série telle **qu'au moins les trois quarts** des valeurs de la liste **sont inférieures ou égales à $Q_3$**

Ex : Calculons les quartiles de notre série statistique de départ.

| **Taille (cm)** | 17 | 18 | 20 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectifs** | 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

L'effectif total est de 28.

$\frac{1}{4}$ de l'effectif correspond à 7 individus.

La plus petite valeur telle qu'au moins un quart des valeurs lui soient inférieures est 22.
Le premier quartile $Q_1$ est donc égal à 22.

je cherche la taille correspondant à la 7ème truite ! !

$\frac{3}{4}$ de l'effectif correspond à 21 individus.

La plus petite valeur telle qu'au moins trois quarts des valeurs lui soient inférieures est 24.
Le troisième quartile $Q_3$ est donc égal à 24.

je cherche la taille correspondant à la 14 ème truite !


et si le quart ou les trois quarts des individus ne correspondent pas à des nombres entiers ?

Ex : Modifions les données pour étudier ce cas

| **Taille (cm)** | 17 | 18 | 20 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectifs** | 1 | 4 | 3 | 4 | 7 | 2 | 4 |

L'effectif total est de 25. $\frac{1}{4}$ de 25 est égal à 6,25. $\frac{3}{4}$ de 25 est égal à 18,75

Le premier quartile est la valeur telle qu' **au moins** un quart des valeurs lui soient inférieures. Il s'agit donc de 20

je cherche la taille correspondant à la 7 ème truite ! !

Le troisième quartile est la valeur telle qu' **au moins** trois quarts des valeurs lui soient inférieures. Il s'agit donc de 23

je cherche la taille correspondant à la 19 ème truite !

b) Mesures de dispersion :

**définition :** **L'étendue d'une série** est la **différence entre la plus grande et la plus petite** valeur de la série.

**définition :** **L'écart interquartile** est la **différence entre le troisième et le premier quartile.**

Ex : Reprenons la série statistique de départ.

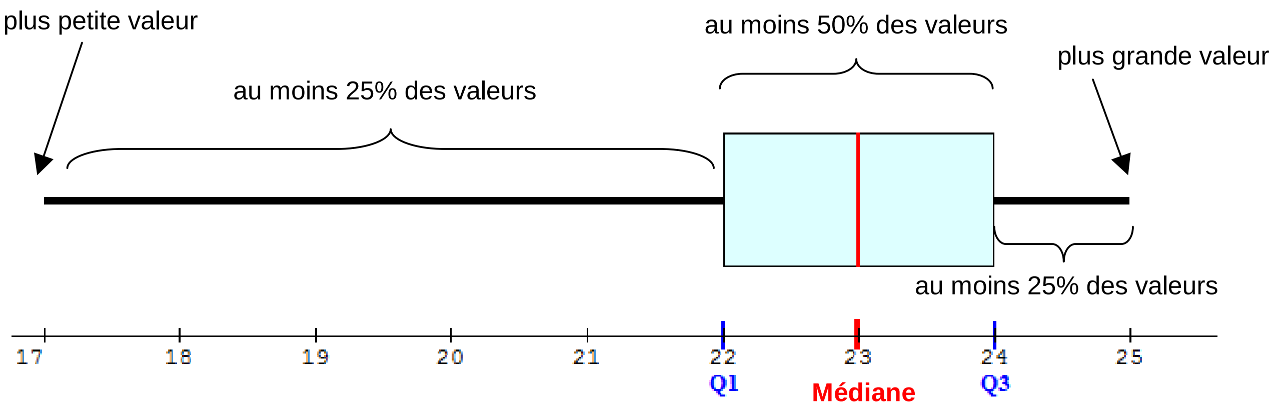
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Taille (cm)** | 17 | 18 | 20 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| **Effectifs** | 2 | 1 | 3 | 2 | 5 | 8 | 7 |

L'étendue de la série est : 25 - 17 = 8 cm
L' écart interquartile est : $Q_3 - Q_1 = 24 - 22 = 2$

## III) Résumé d'une série statistique :

On peut résumer tous les paramètres sur un diagramme "en boîte".

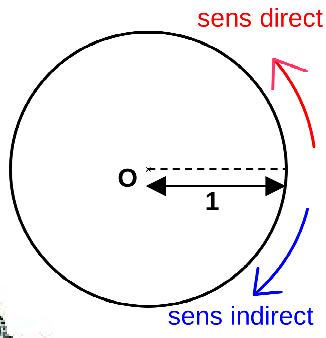
Ex : Résumons les indicateurs de notre première série statistique.




| |
|---|
| Près de la moitié des truites ont une taille entre 22 et 24 cm !<br>L'étendue de la série est de 8 cm.<br>La plus petite taille est 17 cm, la plus grande est 25 cm.<br>Près de la moitié des truites ont une taille inférieure ou égale à 23 cm ! |

# Trigonométrie

## I) Cercle trigonométrique :

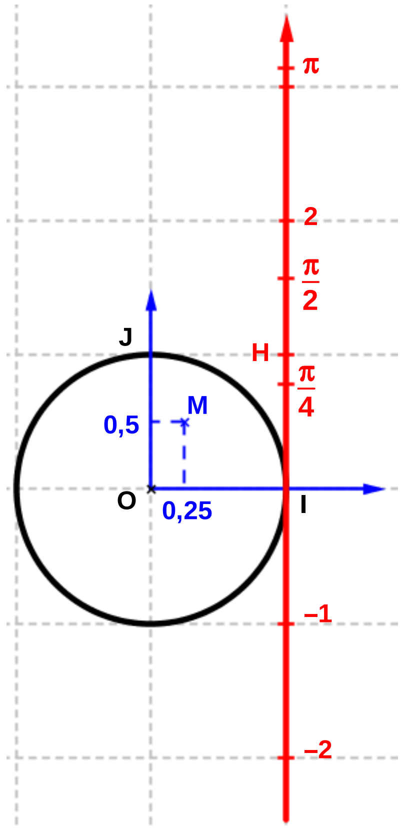



**définition :** Un cercle trigonométrique est **un cercle de rayon 1** sur lequel on distingue **deux sens de parcours** : **le sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre et le **sens indirect** (sens des aiguilles d'une montre).

Le rayon étant de 1 (une unité), la longueur du **cercle** est **$2\pi$**, celle du **demi-cercle** est **$\pi$**, celle du **quart de cercle** est $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ !

## II) Enroulement d'une droite numérique sur le cercle trigonométrique :

### a) droite numérique :




Soit $\mathscr{C}$, un cercle trigonométrique de centre O.

(O;I;J) est un repère orthonormé.

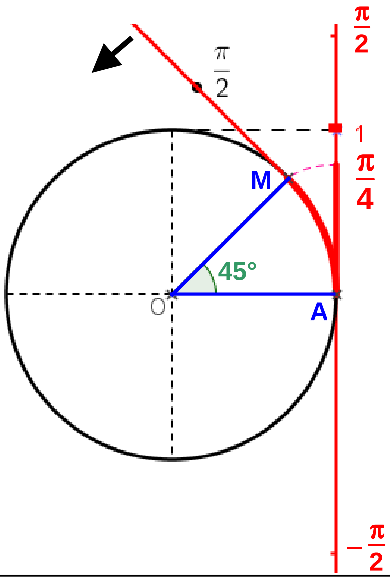
Dans ce repère,
M a pour coordonnées : (0,25 ; 0,5)
H a pour coordonnées : (1 ; 1)

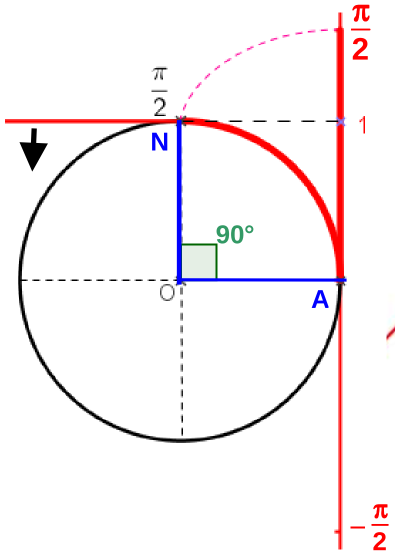
On munit (IH) du repère (I;H). On a donc une droite graduée recouvrant tous les réels.
Nous appellerons cette droite, **droite numérique**.

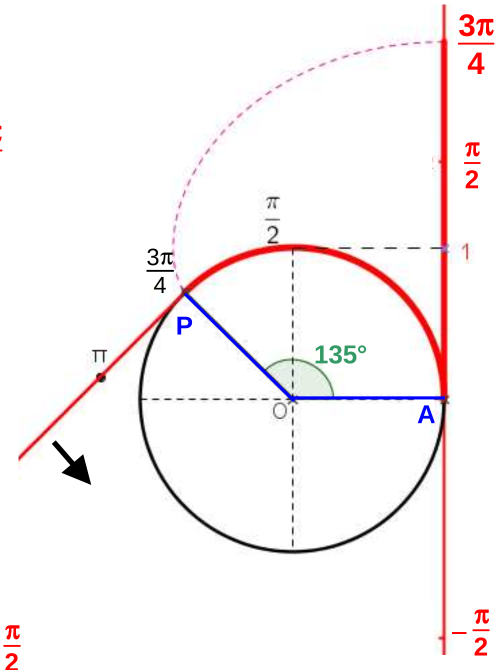
### b) enroulement de la droite numérique :

Imaginons que nous enroulions la droite autour du cercle. On associe à chaque abscisse d'un point de la droite, un point du cercle.

### ► enroulement dans le sens direct




Le réel $\frac{\pi}{4}$ vient "s'appliquer" sur le point M.

L'arc $\overset{\frown}{\textbf{AM}}$ a pour longueur $\frac{\pi}{4}$

**M est associé au réel <u>positif</u>** $\frac{\pi}{4}$.

L'angle $\widehat{AOM}$ a pour mesure 45°

Le réel $\frac{\pi}{2}$ vient "s'appliquer" sur le point N.

L'arc $\overset{\frown}{\textbf{AN}}$ a pour longueur $\frac{\pi}{2}$

**N est associé au réel <u>positif</u>** $\frac{\pi}{2}$

L'angle $\widehat{AON}$a pour mesure 90°

Le réel $\frac{3\pi}{4}$ vient "s'appliquer" sur le point P

L' arc $\overset{\frown}{\textbf{AP}}$ a pour longueur $\frac{3\pi}{4}$

**P est associé au réel <u>positif</u>** $\frac{3\pi}{4}$

L'angle $\widehat{AOP}$ a pour mesure 135°

Pour exprimer la mesure d'un angle on peut donc utiliser la longueur de l'arc de cercle !

Pour un angle de 45° la longueur de l'arc de cercle est de $\frac{\pi}{4}$ soit environ 0,78.

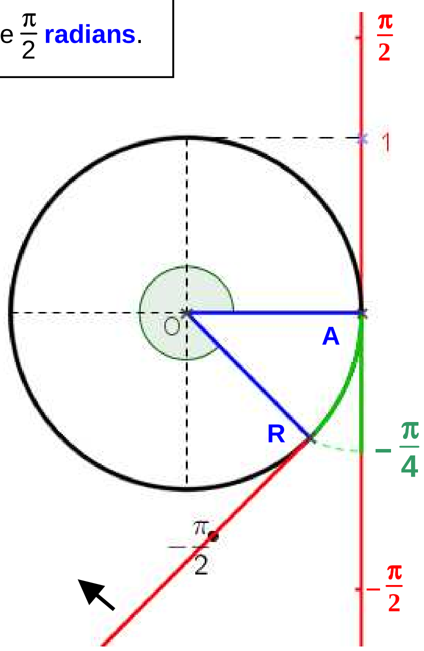
Cette unité s'appelle **le radian** ! Par exemple, un angle de **90°** a une mesure de $\frac{\pi}{2}$ **radians**.

### ► enroulement dans le sens indirect

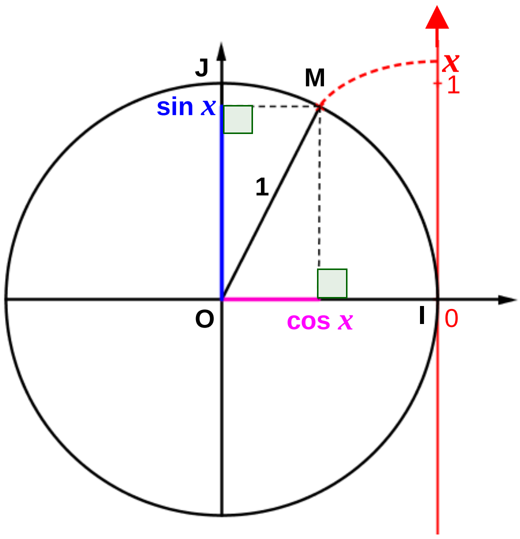
Le réel $-\frac{\pi}{4}$ vient s'appliquer sur le point R.

L'arc $\overset{\frown}{AR}$ a pour longueur $\frac{\pi}{4}$

R est associé au réel **<u>négatif</u>** $-\frac{\pi}{4}$



## III) Cosinus et sinus d'un nombre :

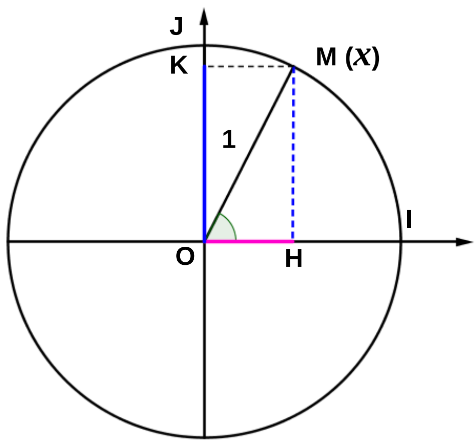



**définition :** Soit (O ; I ; J) un repère orthonormé **direct** du plan et $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique de centre O.

Soit **M** un point de $\mathscr{C}$ **associé** à un réel $x$

On appelle **cosinus de $x$** notée **cos $x$** l'**abscisse** de M
On appelle **sinus de $x$** notée **sin $x$** l'**ordonnée** de M

**remarque :** Soit $x$ un nombre réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.




Soit M son point associé sur le cercle trigonométrique.
M se trouve sur l'arc de cercle $\overset{\frown}{\text{OI}}$ et $\widehat{\text{OIM}}$ est aigu.
on a alors

$$\cos \widehat{\text{IOM}} = \frac{\text{OH}}{\text{OM}} = \frac{\text{OH}}{1} = \cos x$$

$$\sin \widehat{\text{IOM}} = \frac{\text{MH}}{\text{OM}} = \frac{\text{MH}}{1} = \sin x$$

| |
|---|
| Voilà le lien avec le cosinus et le sinus d'un angle que nous avions vus en troisième !! |

**propriétés :** Pour tout nombre réel $x$,

▶ $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ ▶ $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ ▶ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

▶ **démonstration**

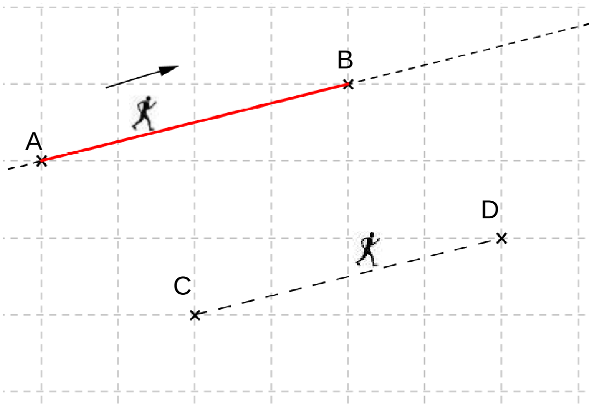
Les deux premières propriétés sont des conséquences des définitions du sinus et du cosinus.

Dans le repère orthonormé (O ; I ; J), M a pour coordonnées ($\cos x$ ; $\sin x$)
Le triangle OHM est rectangle en H.
donc $\text{OM}^2 = \text{OH}^2 + \text{HM}^2$ (d'après le théorème de Pythagore)
or, $\text{OM}^2 = 1$, $\text{OH}^2 = \cos x$, $\text{HM}^2 = \sin x$
donc $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

# Vecteurs

## I) Vecteurs et translation :

### a) notion de translation :




Pour aller de A à B, le marcheur se déplace :

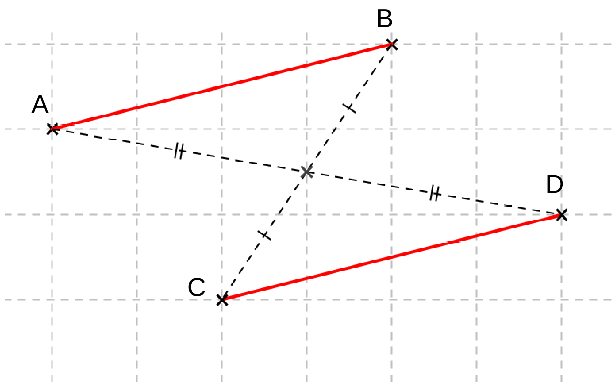
- dans le **sens** indiqué par la flèche
- sur une **longueur** correspondant à celle de [AB]
- dans la **direction** indiquée par celle de la droite (en pointillés)

Le point B est obtenu par une translation du point A.
En utilisant la même translation, on transforme C en D.

**définition :** Soient A et B deux points du plan.
La **translation** qui transforme **A en B** associe **à C l'unique point D** tels que les segments **[AD ] et [BC] ont le même milieu**.

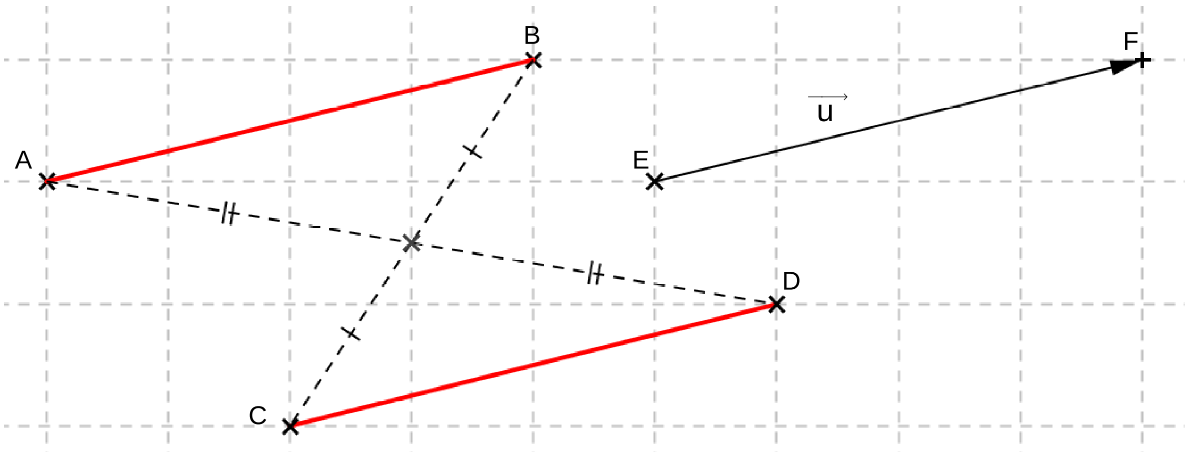
Ex :

ABDC est un parallélogramme ! (attention à l'ordre des points)




### b) notion de vecteur :

Le vecteur permet de définir une translation. Il doit donc préciser un sens, une direction, une longueur. On le représente sous forme de segment fléché.



La **translation** qui transforme **A en B** est la **translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$**
E est l'**origine** du vecteur $\overrightarrow{EF}$
F est l'**extrémité** du vecteur $\overrightarrow{EF}$

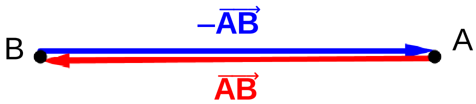
> $\overrightarrow{EF}$ a pour direction celle de (EF), pour sens celui de A vers B, pour longueur AB !. On peut le noter par une seule lettre, $\overrightarrow{u}$ par exemple.

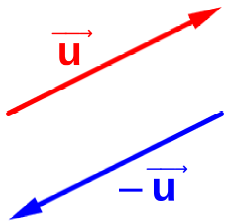
► Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ caractérisent la même translation que $\overrightarrow{EF}$.
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$ sont des vecteurs égaux.

> On peut dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des **représentants** du vecteur $\overrightarrow{u}$

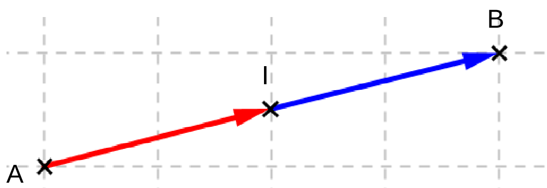
► Si A et B sont confondus, $\overrightarrow{AB}$ s'écrit $\overrightarrow{AA}$. C'est le vecteur nul. $\boldsymbol{\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}}$

► Le **vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$** est le vecteur associé à la translation transformant B en A.
On le note **$-\overrightarrow{AB}$**. $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$



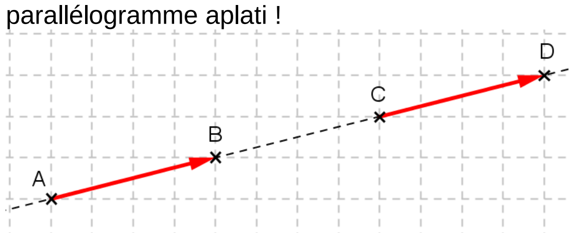

► Le point **I** est **le milieu du segment [AB]** si, et seulement si, $\boldsymbol{\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}}$

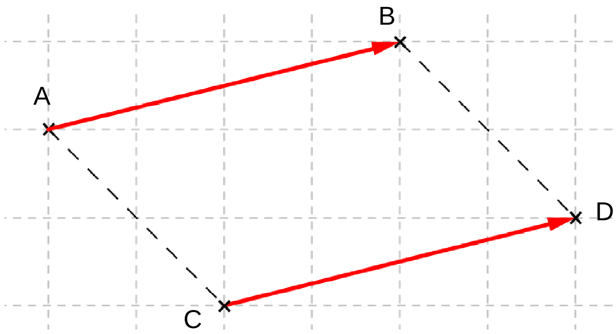


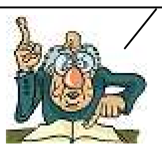

b) vecteurs égaux :

**définition :** Soient A, B, C, D quatre points du plan avec A ≠ B.
Les vecteurs **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux** si, et seulement si, **ABDC** est **un parallélogramme**.

> Si A, B, C, D sont alignés; ABDC sera un parallélogramme aplati !



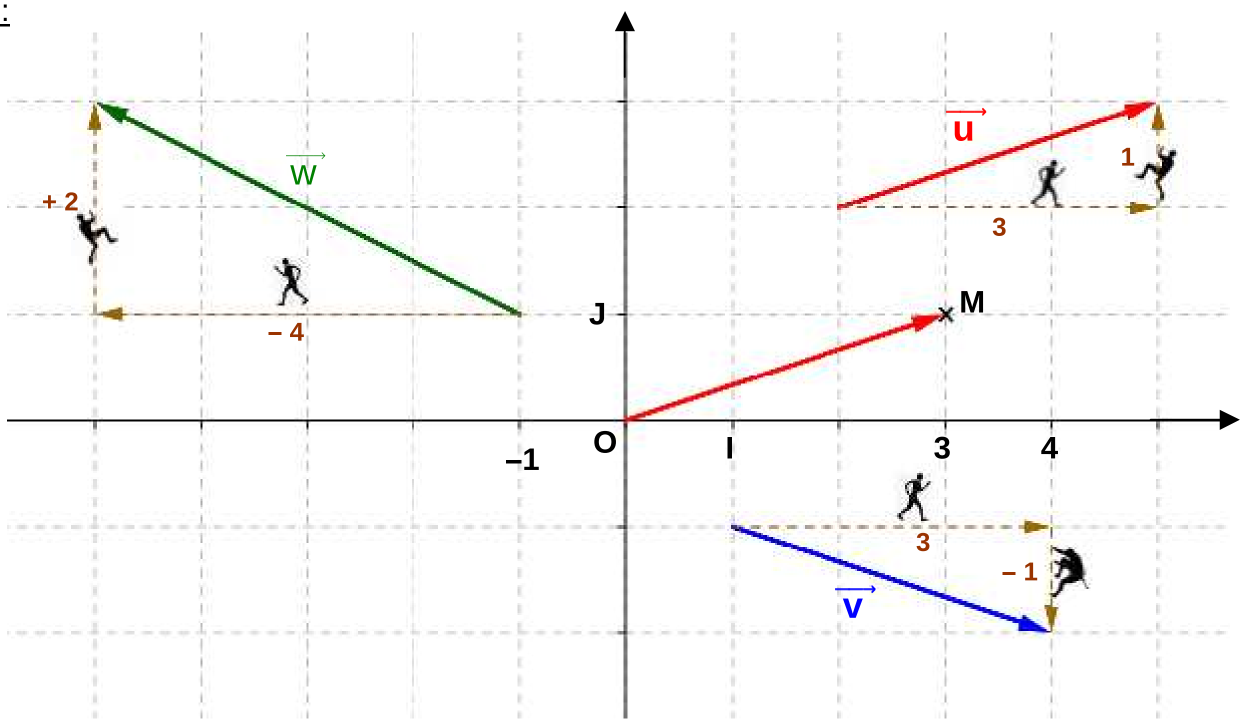



## II) Coordonnées d'un vecteur :

**définition :** Dans un repère (O; I; J); **les coordonnées du vecteur $\vec{u}$** sont les **coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$**
Les **coordonnées** du vecteur nul $\vec{0}$ sont **(0;0)**

| |
|---|
| le **repère (O;I;J)** est également souvent noté (O; $\vec{i}$ ; $\vec{j}$ ) avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ |

Ex :




Les coordonnées de $\vec{u}$ sont **(3;1)**, celles de $\vec{v}$ sont **(3;–1)** et celles de $\vec{w}$ sont **(– 4;2)**

**propriété :** Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs **coordonnées** dans un repère sont **égales**.

Soient $\vec{u}$ de coordonnées ($x$, y) et $\vec{v}$ de coordonnées ($x$ ',y') dans un repère (O,I,J)

**$\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si $x = x'$ et y = y'**

► ***démonstration***

- Si $\vec{u} = \vec{v}$ , il existe un unique point M ($x_M$;$y_M$) tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u} = \vec{v}$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont les mêmes coordonnées que celles de M : $\begin{cases} x = x_M = x' \\ y = y_M = y' \end{cases}$

- Réciproquement, si deux vecteurs $\vec{u}$($x$,y) et $\vec{v}$($x$',y') sont tels que $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ (avec M de coordonnées (x;y) ) donc $\vec{u} = \vec{v} = \overrightarrow{OM}$

**propriété :** Soient deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ dans un repère.
Les **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A;y_B - y_A)$

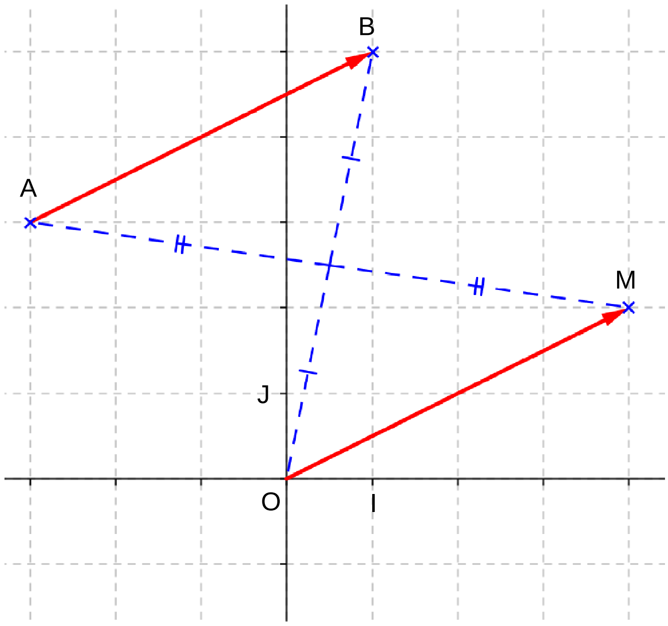
► ***démonstration***

Par définition,
il existe un unique point $M(x_M; y_M)$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont celles du point M.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$
donc OMBA est un parallélogramme
par suite [AM] et [OB] ont le même milieu .
cela se traduit par :

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_M}{2} = \dfrac{0 + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_M}{2} = \dfrac{0 + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_M = x_B \\ y_A + y_M = y_B \end{cases}$$

donc $\begin{cases} x_M = x_B - x_A \\ y_M = y_B - y_A \end{cases}$ donc $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A;y_B - y_A)$




Ex :

E a pour coordonnées (–2;4)

F a pour coordonnées (4;3)

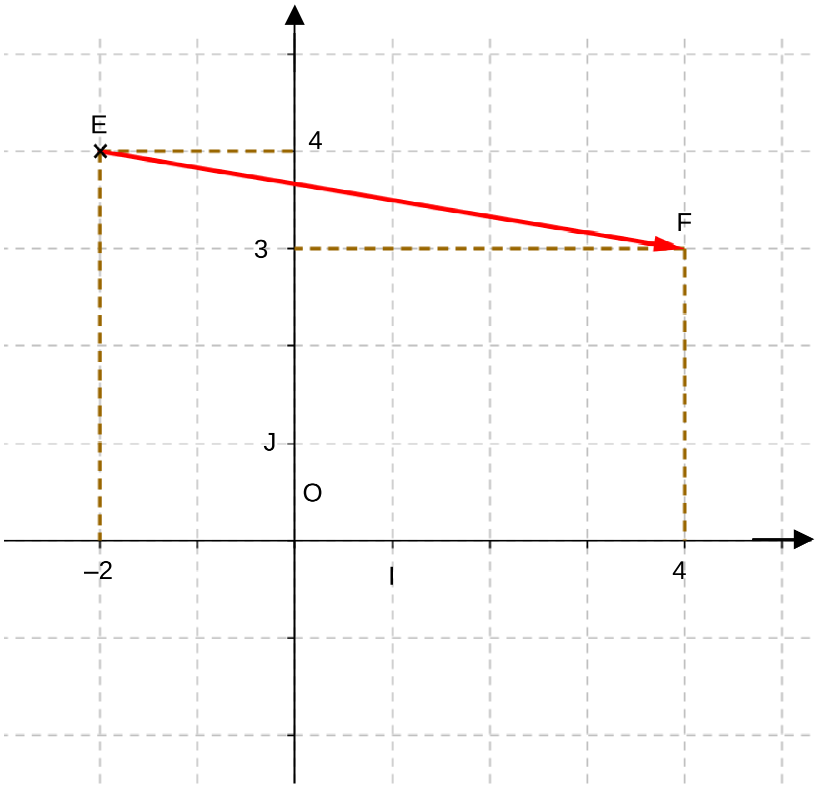
Les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$ sont :

$(x_F - x_E;y_F - y_E)$

$= (4 - (-2);3 - 4)$

$= ( 4 + 2; 3 - 4)$

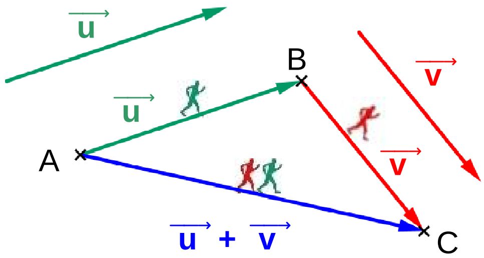
$= (6 ; - 1)$




Dans un repère (O;I;J), le **vecteur nul** $\vec{0}$ a pour coordonnées **(0;0)** !

## II) Somme de deux vecteurs :

**définition :** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
La **somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** est **le vecteur associé** à la translation ayant les mêmes effets que **la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de celle de vecteur $\vec{v}$**
On le note $\vec{u} + \vec{v}$




Par translation de vecteur $\vec{u}$, A a pour image B
Par translation de vecteur $\vec{v}$, B a pour image C
C est l'image de du point A par translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$

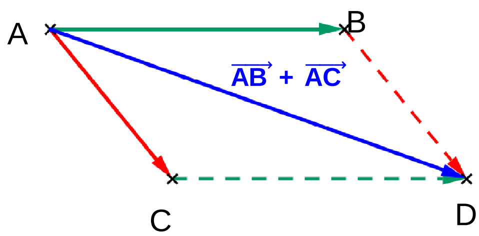
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$

**relation de Chasles :**
D'après ce qui précède,
Quels que soient les points A, B, C du plan, on a l'égalité :

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}$$

**propriété :** la règle du parallélogramme
Soient A, B, C trois points distincts du plan,

La somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$
si, et seulement si, **ABDC** est un **parallélogramme**




► ***démonstration***

- Si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ alors, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ et ABDC est un parallélogramme

- Réciproquement, si ABDC est un parallélogramme on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ alors,
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ (en utilisant la relation de Chasles)

**propriétés *(admises)*:**

Je peux changer l'ordre des termes, les grouper indifféremment, la somme des vecteurs ne changera pas !

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

**propriété *(admise)*:**
Dans un repère, si les coordonnées de $\vec{u}$ sont $(x, x')$ et celles de $\vec{v}$ sont $(y,y')$ alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x' ; y + y')$

Les coordonnées de la somme sont la somme des coordonnées !

Ex : Soient $\vec{u}(-4 ; 3)$ et $\vec{v}(5 ; -2)$

Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(-4 + 5 ; 3 + (-2))$ soit **(1 ; 1)**

## III) Produit d'un vecteur par un nombre réel :

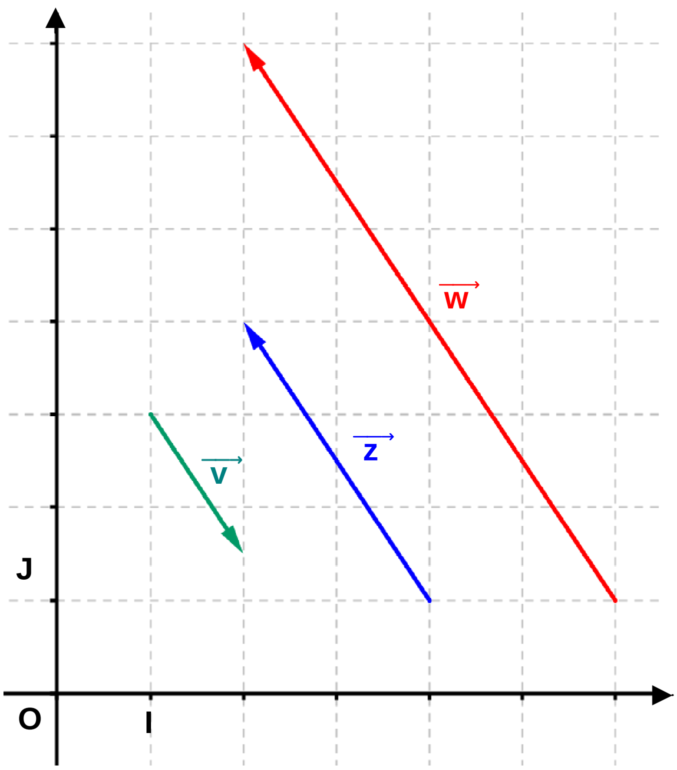
**définition :** Soient $\vec{u}$ $(x ; y)$ un vecteur et **k** un nombre réel.
Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx ; ky)$

$k\vec{u}$ est le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k

Ex :
Soient $\vec{z}(-2 ; 3)$ , $\vec{w}(-4 ; 6)$, $\vec{v}(1 ; -1,5)$

$$\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{z}$$

$$\vec{w} = 2\vec{z}$$




**Si k est positif,** $k\vec{u}$ a le même sens et la même direction que $\vec{u}$
(c'est le cas dans l'exemple pour $\vec{z}$ et $\vec{w}$)

**Si k est négatif,** $k\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$ mais est de sens contraire
(c'est le cas dans l'exemple pour $\vec{z}$ et $\vec{v}$)

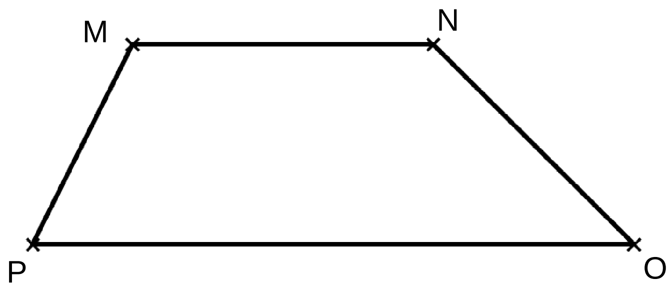
**définition :** Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{CD}$ sont dit **colinéaires** si $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{CD}$ ont **la même direction.**

| |
|---|
| Cela revient à dire que (AB) et (CD) sont parallèles ! |

Ex : Soit le trapèze MNOP de bases [MN] et [OP]

$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PO}$ sont colinéaires

| |
|---|
| $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont aussi colinéaires !! |




**définition :** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel **k** tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$

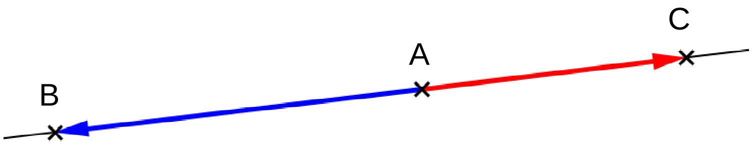
| |
|---|
| $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, il existe donc également un nombre réel **k'** tel que $\vec{u} = k'\,\vec{v}$ ! <br> Par exemple, si $\vec{v} = 3\,\vec{u}$ alors $\vec{u} = \frac{1}{3}\,\vec{v}$ !! |

► Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs. $0\,\vec{u} = \vec{0}$

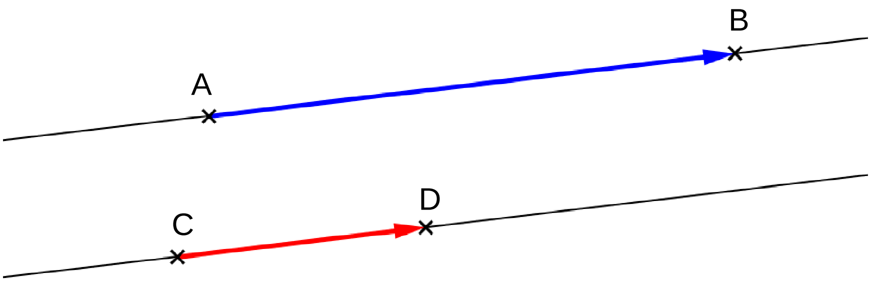
**propriétés admises :**

- Trois points **A, B, C sont alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.

| |
|---|
| A, B, C sont alignés revient en effet à dire que les droites (AB) et (AC) sont confondues (donc parallèles) !! |




- Deux droites **(AB) et (CD) sont parallèles** si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{CD}$ **sont colinéaires.**



**règles de calcul :**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ ; pour tous réels k et k' on a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

Ex :

- $4(\vec{AC} + \vec{EF}) = 4\vec{AC} + 4\vec{EF}$
- $3\vec{AB} - 6\vec{AB} = (3 - 6)\vec{AB} = -3\vec{AB}$
- $-8(5\vec{AB}) = -40\vec{AB}$

**propriété** : Deux vecteurs **$\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires** si, et seulement si,
**$xy' - x'y = 0$**

► ***justification***
Supposons que $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ soient **colinéaires**.
Il existe alors un nombre réel k tel que $x' = kx$ et $y' = ky$.
Les **coordonnées des vecteurs** sont donc **proportionnelles**.

On a donc le tableau de proportionnalité suivant :

| | | |
|---|---|---|
| coordonnées de $\vec{u}$ | $x$ | y |
| coordonnées de $\vec{v}$ | $x'$ | y' |

On a donc $xy' = x'y$ (règle des produits en croix)

Par suite, $xy' - x'y = 0$

Ex :

- $\vec{u}(3;-2)$ et $\vec{v}(-9;6)$ sont colinéaires car $3 \times 6 - (-2) \times (-9) = 18 - 18 = 0$
- $\vec{w}(3;2)$ et $\vec{z}(6;5)$ ne sont pas colinéaires car $3 \times 5 - 2 \times 6 = 3$