Calcul littéral

Rappels :

▶ Dans une .expression **littérale**, un ou plusieurs nombres sont désignés par des **lettres.**

Ex :

- **2** x **a + 3** est une expression littérale

On peut calculer la valeur d'une expression littérale en remplaçant les lettres par des valeurs numériques. Pour **a = –5**, on obtient ici : 2 x a + 3 = 2 x **(–5)** + 3 = –10 + 3 = – 7

- **3** x x^2 **+ 5** x **(m + 6)** est une expression littérale

Pour **x = 5** et **m = –7,** calculons la valeur de l'expression : 3 x x^2 + 5 x (m + 6) =3 x **5**^{2} + 5 x (**–7** + 6) = 3 x 25 + 5 x (–1) = 75 + (– 5) = 70

▶ On peut supprimer parfois « x » dans l'écriture d'une expression littérale

Ex : x **x** y = xy 3 **x** a = 3a 2 **x** (5b + c) = 2(5b + c)

Le signe de multiplication peut être supprimé devant une lettre ou une parenthèse ! ! 2 **x** a + 3 = 2a + 3 et 3 **x** x^2 + 5 **x** (m + 6) = 3x^2 + 5(m + 6)

▶ Pour simplifier l'écriture d'une suite d'additions, on peut :

- supprimer **les signes d'addition et les parenthèses autour des nombres relatifs.**
- écrire le **premier terme sans parenthèses**
- **supprimer le signe "+" devant un nombre se trouvant en début de ligne**

L'expression obtenue est une somme algébrique.

Ex :

▶ (– 9,7) **+** (+ 3) **+** (– 7,8) **+** (– 6,9) **+** (+ 2,1) = – 9,7 + 3 – 7,8 – 6,9 + 2,1

▶ une différence peut donc s'écrire sous forme de somme algébrique ! • (+4) – (–15) = (+4) + (+15) = 4 + 15 ▶ une suite d'additions et de soustractions peut s'écrire sous forme de somme algébrique ! • (+14) – (–10) + (–8) = (+14) + (+10) + (–8) = 14 + 10 –8 ▶ écrire une somme algébrique, c'est écrire des nombres relatifs à la suite l'un de l'autre sans parenthèses, • –5 + 7 – 9 – 3 = (–5) + (+7) + (– 9) + (– 3) = (–5) – (–7) + (– 9) – (+ 3) =..... • 4 – 11 + 5 – 13 = (+4) + (– 11) + (+ 5) + (– 13) = = (+4) + (– 11) – (– 5) + (– 13) =... sommes algébriques

I) Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la soustraction

propriété : Soient k, a, b trois nombres quelconques

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ et $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$

produit **somme algébrique** **produit** **somme algébrique**

J'ai « **distribué** » k dans chaque expression.
La **multiplication** est **distributive** par rapport à **l'addition** et **la soustraction.**

Ex :

$5 \times (2 + 4)$
$= 5 \times 2 + 5 \times 4$
$= 10 + 20$
$= 30$

$3 \times (a - 7)$
$= 3 \times a - 3 \times 7$
$= 3a - 21$

II) Développer une expression littérale:

définition : développer, c'est transformer un produit en somme algébrique

a,b,c désignent trois nombres relatifs :

$a(b + c) = ab + ac$ $a(b - c) = ab - ac$

produit somme algébrique produit somme algébrique

J'utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la soustraction!

Ex :
Développons :

$-5\,(y + 7) = -5 \times y + (-5) \times 7 = -5y - 35$ Je « distribue » –5 sur chaque terme de la somme !

$9\,(a - 2) = 9 \times a - 9 \times 2 = 9a - 18$ Je « distribue » 9 sur chaque terme de la différence !

$(5x - 3) \times 4x = 5x \times 4x - 3 \times 4x = 20x^2 - 12x$ je « distribue » $4x$!

attention à développer en respectant l'ordre des termes.
Ici, on commence par distribuer $4x$ avec $5x$!

III) Factoriser une expression littérale:

définition : **factoriser,** c'est transformer une somme algébrique en produit.

a,b,c désignent trois nombres relatifs :

$$ab + ac = a\,(b + c) \qquad\qquad ab - ac = a\,(b - c)$$

somme algébrique — produit — somme algébrique — produit

Ex :

Factorisons : $7a + 7 \times 5 = 7 \times a + 7 \times 5 = 7(a + 5)$

Je cherche un **facteur commun** dans chaque terme de la somme algébrique

Factorisons : $5{,}6x - 4{,}2x = 5{,}6 \times x - 4{,}2 \times x = x(5{,}6 - 4{,}2) = 1{,}4x$

Je cherche un **facteur commun** dans chaque terme de la somme algébrique

Factorisons : $-3y - 21 = (-3) \times y + (-3) \times 7 = -3(y + 7)$

Je transforme l'expression pour trouver un **facteur commun** !

Factorisons : $3x^2 + 6x = 3x \times x + 3x \times 2 = 3x(x + 2)$

Je transforme l'expression pour trouver un **facteur commun** !

IV) Suppression de parenthèses devant des sommes algébriques:

propriété : a, b, c, d désignant quatre nombres relatifs

► **ajouter** une somme algébrique revient à **ajouter chacun de ses termes**

$\mathbf{a + (-c + d - b) = a - c + d - b}$

$\mathbf{a + (c - d + b) = a + c - d + b}$

Ex : $5x + (3x - 2) = 5x + 3x - 2$

Je supprime les parenthèses sans rien changer, elles sont précédées d'un signe d'addition !

► **soustraire** une somme algébrique revient à **ajouter l'opposé de chacun de ses termes**

$\mathbf{a - (-c + d - b) = a + c - d + b}$

$\mathbf{a - (c - d + b) = a - c + d - b}$

Je supprime les parenthèses après avoir changé le signe de chaque terme de la somme, elles sont précédées d'un signe de soustraction !

Ex : $5x - (3x - 2) = 5x - 3x + 2$

V) Réduction d'une expression littérale:

définition : **réduire** une expression revient à l'écrire **avec le moins de termes possibles.**

Ex :

- $7x + 9x = (7 + 9)x = 16x$

Je regroupe les termes en « x » !

- $8x^2 – 5x^2 + x^2 = (8 – 5 + 1)\, x^2 = 4\, x^2$

Je regroupe les termes en « x^2 » !

- $5a^2 – 6a + 3 + 7a^2 + a – 6 = 12a^2 – 5a – 3$

je regroupe les termes ayant des parties littérales de même nature !

Attention, je ne peux rien réduire dans l'écriture d' une expression comme : $7x^2 + 3\, x + 5$. Les termes ne sont pas de même nature !

Équations

I) Mise en équation de problèmes :

► Voici l'énoncé d'un problème :

Le réservoir d'essence de ma voiture a **une capacité totale de 60 litres**.
Il manque **32 litres** d'essence pour qu'il soit plein.
Quelle **quantité d'essence** se trouve dans le réservoir ?

Pour simplifier notre recherche, nous allons « traduire » l'énoncé par une phrase mathématique.

Quantité d'essence inconnue + **32** = **60**

Pour simplifier davantage, je remplace la valeur inconnue par une lettre. Je choisis une lettre. x par exemple

$$\boxed{x + 32 = 60}$$

Le problème est traduit sous forme d'**une égalité avec une inconnue :** une **équation.**

- La solution est facile à trouver. $x = 28$. Je vérifie que l'égalité est vraie en remplaçant x par 28.

En effet, **28 + 32 = 60**. **28 est donc bien la solution de l'équation**. Mon réservoir contenait donc 28 litres.

- Par contre, **10 n'est pas solution de l'équation**. **10** + 32 = 42 donc l'égalité est fausse, elle n'est pas vérifiée.

► Voici l'énoncé d'un second problème :

René a acheté une aubergine et pour 2,25 € de pommes.
Anaïs a acheté deux aubergines et pour 1,15 €, un melon.
Ils ont tous deux dépensé la **même** somme.
Quel est le prix d'une aubergine ?

Appelons x le prix d'une aubergine
On peut **traduire** cette situation par l' équation

$$\boxed{2x + 1{,}15 = x + 2{,}25}$$

Le problème a été mis sous forme d'**équation**
x est appelé l'**inconnue** de l'équation.
Nous allons par la suite apprendre une méthode pour trouver la valeur cherchée.

II) Équations :

définition : une équation est une égalité comportant un ou plusieurs nombres inconnus (souvent désignés par des lettres).
Les nombres inconnus sont nommés **les inconnues de l'équation**.

Ex : L'égalité $\underbrace{\mathbf{3}x + \mathbf{4}}_{\text{membre de gauche}} \mathbf{=} \underbrace{\mathbf{9}x - \mathbf{8}}_{\text{membre de droite}}$ est une équation d'inconnue x.

définition : les solutions d'une équation sont les valeurs des inconnues pour lesquelles l'égalité est vraie.
Trouver toutes les solutions d'une équation, c'est **résoudre l'équation**.

Ex : Reprenons l'exemple précédent.
Soit l'équation $\mathbf{3}x + \mathbf{4} = \mathbf{9}x - \mathbf{8}$

2 est une solution de l'équation. En effet :

on remplace x par 2 dans le membre de gauche de l'équation
$\mathbf{3}x + \mathbf{4} = \mathbf{3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10}$

on remplace x par 2 dans le membre de droite de l'équation
$\mathbf{9}x - \mathbf{8} = \mathbf{9 \times 2 - 8 = 18 - 8 = 10}$

on obtient le même résultat dans chaque membre.
l'égalité est donc vraie. 2 est solution de l'équation

II) Égalités et opérations:

propriété : une **égalité reste vraie** si on **ajoute** (ou on **soustrait**) **le même nombre** à ses deux membres.

a, b, c désignent trois nombres relatifs, on a :

Si a = b alors a + c = b + c | **Si a = b alors a – c = b – c**

Ex : Soit x un nombre relatif

- **Si** $x = 7$ **alors** $x + 4 = 7 + 4$ **donc** $x + 4 = 11$
- **Si** $x = -9$ **alors** $x - 2 = -9 - 2$ **donc** $x - 2 = -11$
- **Si** $x - 9 = 4$ **alors** $x \cancel{-9} \cancel{+9} = 4 + 9$ **donc** $x = 13$

propriété : une **égalité reste vraie** si on **multiplie chaque membre de l'égalité** par un **même nombre**.

a, b, c désignent trois nombres relatifs, on a : $$\textbf{Si } a = b \textbf{ alors } a \times c = b \times c$$

Ex : Soit x un nombre relatif

- **Si** $x = -7$ **alors** $x \times 4 = -7 \times 4$ **donc** $x \times 4 = -28$
- **Si** $\frac{x}{5} = 3$ **alors** $\frac{x}{\cancel{5}} \times \cancel{5} = 3 \times 5$ **donc** $x = 15$

propriété : une **égalité reste vraie** si on divise **chaque membre de l'égalité** par un **même nombre non nul**

a, b, c désignent trois nombres relatifs avec c ≠ 0, on a : $$\textbf{Si } a = b \textbf{ et } c \neq 0 \textbf{ alors } \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

Ex : Soit x un nombre relatif

- **Si** $x = 5$ **alors** $\frac{x}{2} = \frac{5}{2}$ **donc** $\frac{x}{2} = 2{,}5$
- **Si** $-3x = 7$ **alors** $\frac{-3x}{-3} = \frac{7}{-3}$ **donc** $x = -\frac{7}{3}$

Dans une équation du premier degré, l'inconnue est de degré 1 (son exposant est 1). Supposons que l'inconnue soit x, on a donc x^1, c'est à dire x. Dans une équation au deuxième degré, l' inconnue peut être de degré 2 (x^2)

III) Résoudre une équation du 1er degré (à une inconnue) :

Résolvons l'équation d'inconnue x suivante :

$$3x + 9 = 7x - 2$$

« Pour rassembler les " x ", je retranche $7x$ à chaque membre »

$$3x + 9 - 7x = 7x - 2 - 7x$$

$$-4x \qquad\qquad 0$$

« Je réduis l'expression en effectuant les calculs avec les termes en " x " »

$$9 - 4x = -2$$

« Je rassemble les termes " sans x " en ajoutant –9 à chaque membre »

$$9 - 4x - 9 = -2 - 9$$

$$0 \qquad\qquad -11$$

« Je réduis l'expression en effectuant les calculs avec les les termes " sans x " »

$$-4x = -11$$

« Je divise chaque membre par –4 pour qu'il ne reste plus que x dans le premier membre ! »

$$\frac{-4x}{-4} = \frac{-11}{-4}$$

$$x = \frac{-11}{-4} = \frac{11}{4}$$

Il faut faire en sorte que x soit seul dans le premier membre !!

Ex : Résolvons l'équation d'inconnue x suivante :

$$-5x + 4 = 15x - 9$$
$$-5x + 4 - 15x = 15x - 9 - 15x$$
$$-20x + 4 = -9$$
$$-20x + 4 - 4 = -9 - 4$$
$$-20x = -13$$
$$\boldsymbol{x} = \frac{-13}{-20} = \mathbf{\frac{13}{20}}$$

Ex : Résolvons l'équation d'inconnue m suivante :

En développant l'expression, les parenthèses seront supprimées!!

$$3(2 - 5m) = 4m + 7 - (3m + 4)$$
$$6 - 15m = 4m + 7 - 3m - 4$$
$$6 - 15m = m + 3$$
$$6 - 15m - m = m + 3 - m$$
$$6 - 16m = 3$$
$$6 - 16m - 6 = 3 - 6$$
$$- 16m = - 3$$
$$m = \frac{-3}{-16} = \frac{3}{16}$$

IV) Résoudre un problème à l'aide d'une équation :

énoncé :

Jacques et Lucien ont une collection de petites voitures. Jacques en a **12 de moins** que Lucien. Lucien en a **trois fois plus** que Jacques.
Combien de voitures possède Jacques ?

Notons x le nombre de voitures de Jacques

$$\mathbf{3x} = \mathbf{x + 12}$$

Je **traduis** l'énoncé sous forme d'équation !

$$3x - x = x + 12 - x$$

Je **résous** l'équation !

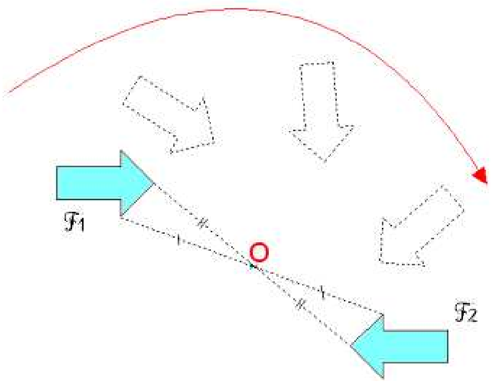
$$2x = 12$$

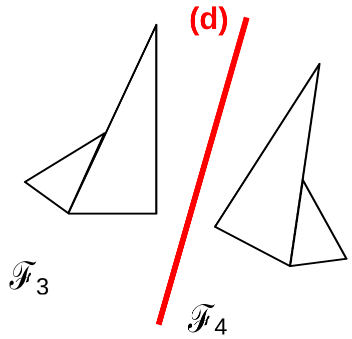
$$x = \frac{12}{2} = \mathbf{6}$$

Jacques possède 6 voitures.

Transformations du plan : la translation et la rotation

Notion de transformation du plan



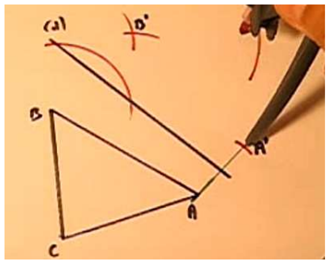


$\mathscr{F}_2$ est la figure **symétrique** de $\mathscr{F}_1$ **par rapport au point O.**
La **symétrie centrale** de centre O **transforme** $\mathscr{F}_1$ en $\mathscr{F}_2$

$\mathscr{F}_4$ est la figure **symétrique** de $\mathscr{F}_3$ **par rapport à (d)**.
La **symétrie axiale** d'axe (d) **transforme** $\mathscr{F}_3$ en $\mathscr{F}_4$

Ces deux transformations sont effectuées dans un même plan.

On trace le symétrique d'une figure sur la même feuille de papier !
On travaille sur la même surface plane, dans le même plan !

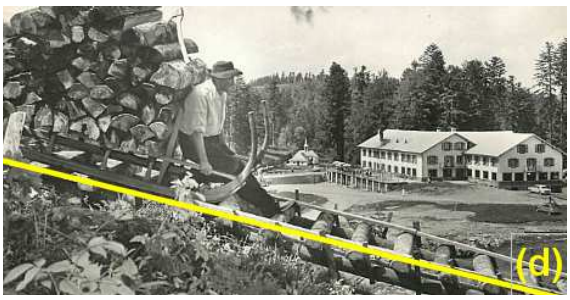


La symétrie axiale et la symétrie centrale sont **deux transformations du plan**.

I) La translation : une transformation du plan

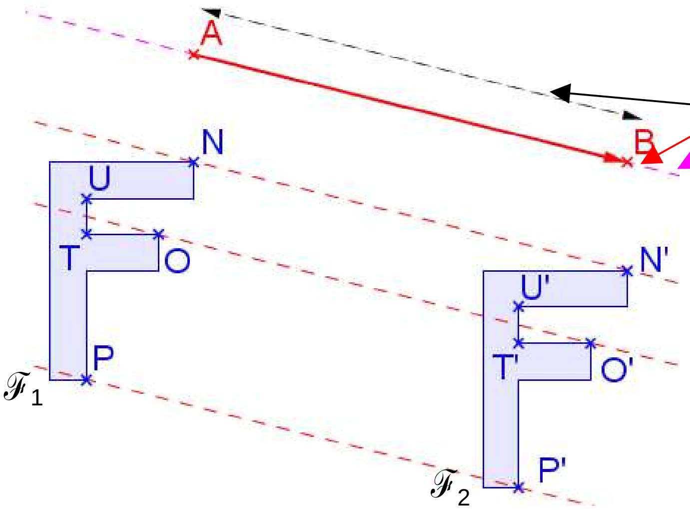
translation vient du latin "**translatio**" signifiant "action de transporter". Nous allons transporter une figure, la déplacer à l'aide de la translation !

définition : **une translation** est un déplacement consistant **à faire glisser** une figure ou un point **parallèlement à une droite**.



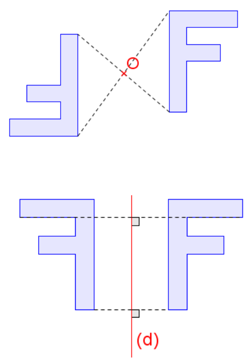
Cette "schlitte" permettant le transport du bois dans l'ancien temps dans les Vosges a un mouvement de translation.
Elle se déplace parallèlement à la droite (d) !

Ex : La figure $\mathscr{F}_2$ **est l'image** de la figure $\mathscr{F}_1$ par **la translation qui transforme A en B**.



je peux symboliser la translation par une flèche indiquant :
- le sens du déplacement
- la direction du déplacement
- la longueur du déplacement

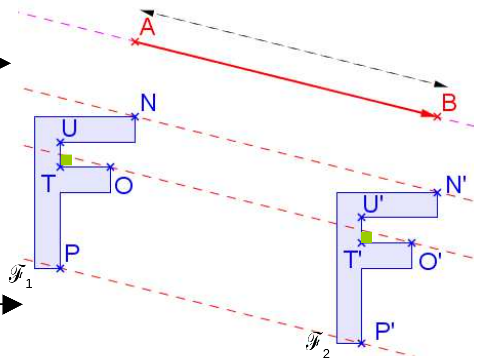
La translation ne déforme pas la figure. Il n'y a pas de changement d'orientation de la figure comme c'était le cas avec les symétries !!



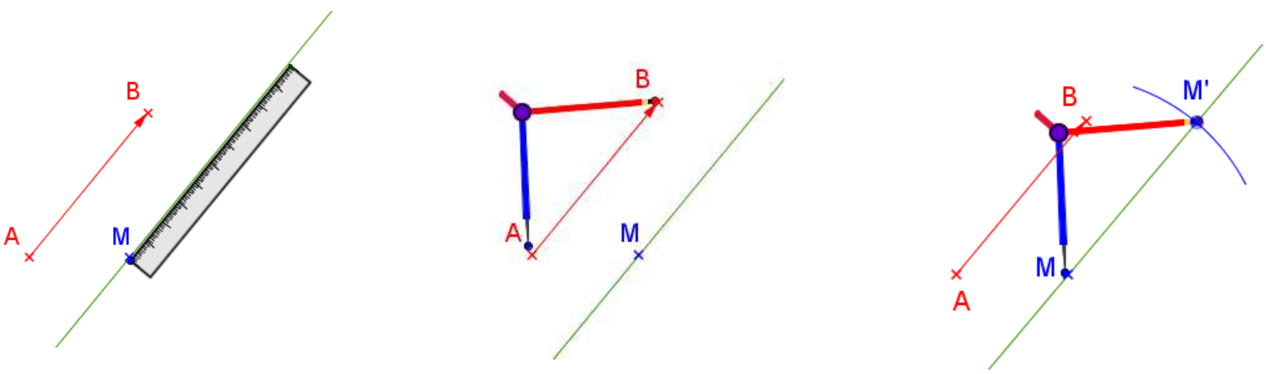
Cette translation transforme U en U', T en T', N en N', O en O', P en P'
Les droites (NN'), (PP'), (OO'), (AB) sont parallèles.

propriétés : Une translation **conserve** :

• **l'alignement**	U, T, P sont **alignés**; U', T', P' sont également **alignés**.
• **les longueurs**	**NN' = TT' = OO' = UU' = PP'**
• **les angles**	$\widehat{UTO} = \widehat{U'T'O'} = 90°$
• **les aires**	les deux figures sont **superposables**, les aires des figures sont égales.



construction :
Construisons le point M', image de M par la translation transformant A en B.



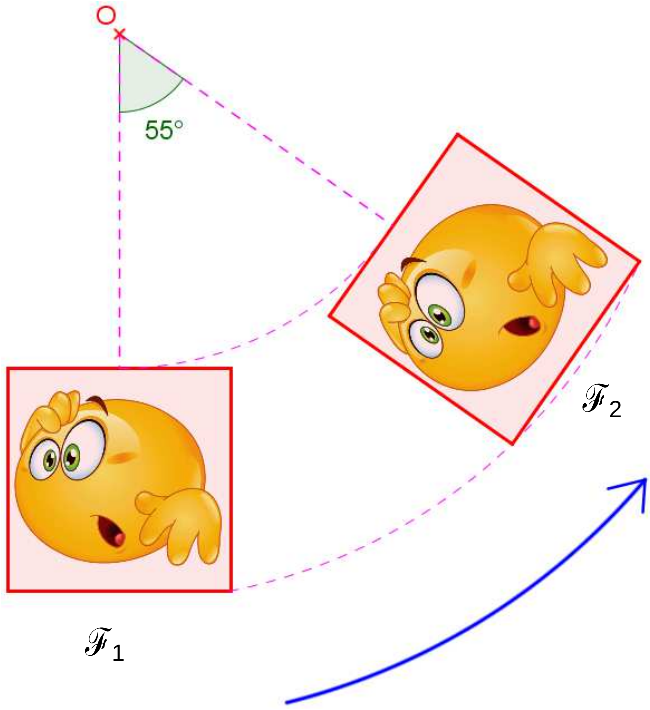
on trace la droite parallèle à (AB) passant par M

avec un compas, on reporte la distance AB sur la droite à partir de M et dans le sens de la flèche allant de A à B.

II) La rotation : une transformation du plan

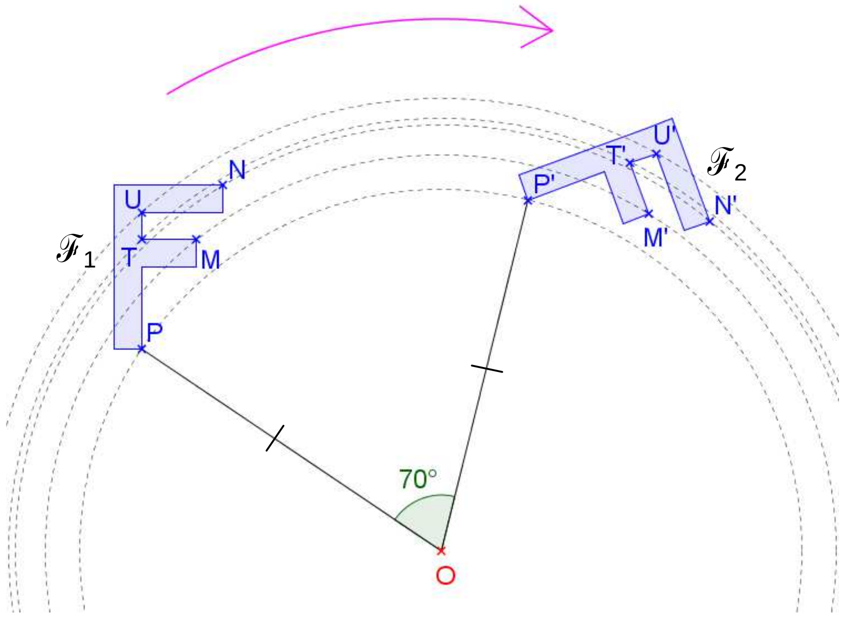
rotation vient du latin "**rotatio**" signifiant "action de faire tourner".

définition : **une rotation** est un déplacement permettant de **faire tourner un point ou une figure d'un certain angle autour d'un point O**



la figure $\mathscr{F}_2$ est l'image de $\mathscr{F}_1$ par la rotation de centre **O**, d'angle **55°** dans le sens indiqué par la flèche (sens contraire à celui des aiguilles d'une montre).

Ex : **La figure** $\mathscr{F}_2$ est l'image **de la figure** $\mathscr{F}_1$ **par la rotation de centre O** et **d'angle 70° dans le sens des aiguilles d'une montre**.

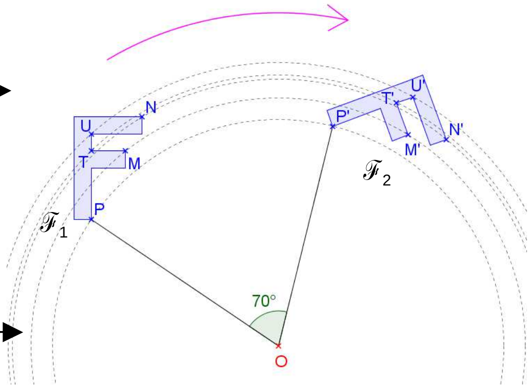


Cette rotation transforme U en U', T en T', N en N', M en M', P en P'

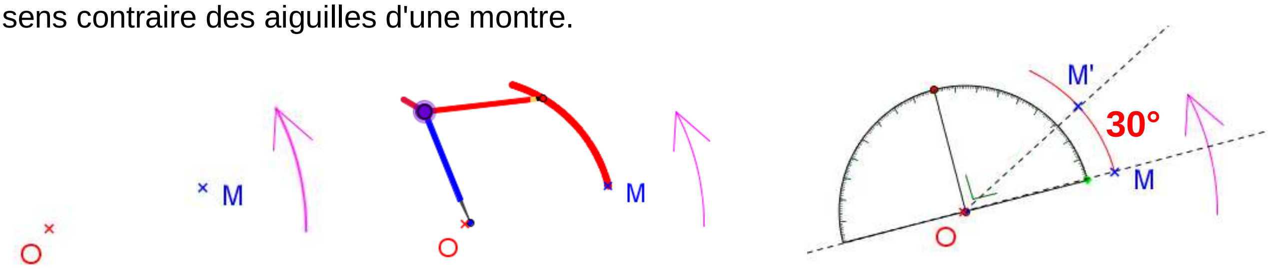
- OP = OP' et $\widehat{POP'}$ = 70°
- OT = OT' et $\widehat{TOT'}$ = 70°
- OM = OM' et $\widehat{MOM'}$ = 70°
- OU = OU' et $\widehat{UOU'}$ = 70°
- ON = ON' et $\widehat{NON'}$ = 70°

<u>propriétés :</u> Une rotation **conserve** :

- **l'alignement** — U, T, P sont **alignés**; U', T', P' sont également **alignés**.
- **les longueurs** — **NN' = TT' = MM' = UU' = PP'**
- **les angles** — $\widehat{UTM} = \widehat{U'T'M'} = 90°$
- **les aires** — les deux figures sont **superposables**, les aires des figures sont égales.



<u>construction :</u>
Construisons le point M', image de M par la rotation de centre O, d'angle 30° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.



On trace un arc de cercle partant de M dans le sens indiqué par la flèche.

→

Avec un rapporteur et un règle, on trace une demi-droite d'origine O faisant un angle de 30° avec la droite (OM) dans le sens de la flèche.
M' est le point d'intersection de l'arc de cercle et de la demi-droite.

Opérations sur les nombres relatifs

<u>Simplification d'écriture</u> :
Un **nombre positif** s'écrira **sans** le signe **"+"** et **sans les parenthèses.**
<u>Ex</u> : **(+**5,6**)** = 5,6 **(+**4**)** + (–5) = 4 + (–5) (–3,2) x **(+**5**)** = (–3,2) x 5

<u>Notation :</u> on note **–a** l'opposé du nombre relatif **a**
<u>Ex</u> :
Si **a = –3** alors **–a = 3**
Si **a = 4,2** alors **–a = –4,2**

attention, **–a** peut désigner un nombre **positif** !

<u>I) Multiplication de nombres relatifs :</u>

<u>Propriété :</u>

- Le produit de **deux nombres relatifs de signes contraires** est **négatif.**
- Sa **distance à zéro** est égale **au produit** des **distances à zéro.**

<u>Ex :</u> 4,5 x (–4) = **–18** (–7) x 8 = **– 56**

<u>Propriété :</u>

- Le produit de **deux nombres relatifs de même signe** est **positif.**
- Sa **distance à zéro** est égale **au produit** des **distances à zéro.**

<u>Ex :</u> (–6) x (–4) = **24** 7,1 x 4 = **28,4**

- le produit d'un nombre relatif **a** par **(–1)** est égal à son **opposé –a**

(–1) x a = a x (–1) = –a

<u>ex :</u> **(–6,7)** x (–1) = **–**(–6,7) = **6,7** **22** x (–1) = **–22**

- Le produit d' un nombre relatif par **0** est égal à **0**.

0 x a = a x 0 = 0

<u>ex :</u> 4,5 x 0 = **0** 0 x (–6,9) = **0**

<u>Propriété :</u>
Dans un produit de plusieurs facteurs,

- Si un des facteurs est **nul**, alors ce produit est **nul.**

<u>Ex :</u> (–133) x (**–** 4) x **0** x 7 x (–5) = **0**

- Si le **nombre de facteurs négatifs** est **pair**, alors ce produit est **positif.**

<u>Ex :</u> (**–**2) x (**–**5) x (**–**3) x 1,2 x (**–**6) = **216**

4 facteurs négatifs, le produit est positif !

- Si le **nombre de facteurs négatifs** est **impair**, alors ce produit est **négatif.**

<u>Ex :</u> (**–**3) x (**–** 4) x 2 x (**–**3) = **– 72**

3 facteurs négatifs, le produit est négatif !

II) Division de nombres relatifs :

définition : a et b désignent deux nombres relatifs avec $b \neq 0$

Le **quotient** de a par b, noté **a : b** ou $\mathbf{\frac{a}{b}}$ est le nombre relatif qui, multiplié par b donne a.

Ex : (–42) : 6 est le nombre à multiplier par 6 pour obtenir (–42) donc : $\frac{-42}{6} = -7$

Propriété :

- Le quotient de deux nombres relatifs **de signes contraires** est **négatif**.
- Sa **distance à zéro** est **le quotient** des **distances à zéro.**

Ex : $\frac{-4}{5}$ = **– 0,8** 100 : (–4) = **–25**

Propriété :

- Le quotient de deux nombres relatifs **de même signe** est **positif.**
- Sa **distance à zéro** est **le quotient** des **distances à zéro.**

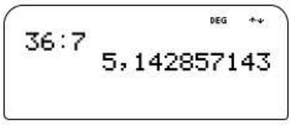
Ex : 75 : 3 = **25** (–8) : (–0,5) = **16**

III) Valeurs approchées d'un quotient :

rappel de vocabulaire :
« L'argent me **manque**, il me fait **défaut** pour pouvoir acheter un téléphone portable !»
« Cette boisson au sirop de fraise n'a aucun goût ! J'ai mis de l'eau en **excès**. Il y en a beaucoup **trop** ! »

a) valeur approchée - troncature :

Effectuons **36 : 7** à l'aide d'une calculatrice, elle affiche ceci



On peut seulement donner une **valeur approchée** du résultat.

La valeur approchée peut être **par défaut** (plus **petite** que la valeur réelle)
La valeur approchée peut être **par excès** (plus **grande** que la valeur réelle)

- Je « coupe » le nombre, j'obtiens une **valeur approchée par défaut** du nombre.

Ex : **5,14** est **la valeur approchée par défaut au centième près** de $\frac{36}{7}$

J'ai « coupé » après le chiffre des centièmes. 5,14 est la **troncature** de $\frac{36}{7}$ **au centième** !

définition : la **troncature** d'un nombre est sa **valeur approchée par défaut**

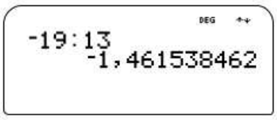
- Je « coupe » à présent le nombre **puis** j'augmente le dernier chiffre obtenu d'une unité, j'obtiens une **valeur approchée par excès** du nombre.

Ex : **5,143** est **la valeur approchée par excès au millième près** de $\frac{36}{7}$

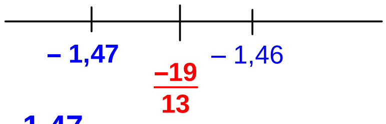
J'ai « coupé » après le chiffre des millièmes-->> 5,142
puis j' « augmente » le dernier chiffre -->> 5,143

Ex : Déterminons une **valeur approchée au centième près par défaut** de **– 19 par 13**

Sur une calculatrice, on obtient ceci →



La valeur approchée au centième près sera –1,46 ou –1,47.
On veut celle par défaut, c'est donc – 1,47.



La **valeur approchée au centième près par défaut** de $\frac{-19}{13}$ est **–1,47**

Bien **tenir compte du signe du quotient** lors de la détermination de la valeur approchée !

b) arrondi - encadrement :

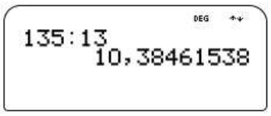
définition : l'arrondi d'un nombre est soit la **valeur approchée par défaut, soit** la **valeur approchée par excès.**
On choisit la valeur approchée la plus proche du nombre.

Ex :

- l'arrondi au centième de 5,1428 est 5,143
- l'arrondi au dixième de (– 1,493) est –1,5

Encadrer un nombre au dixième, au centième etc..,
c'est **l'encadrer par les valeurs approchées par défaut et par excès**

Ex : Considérons le nombre $\frac{135}{13}$



	encadrement	**troncature**	**arrondi**
à l'unité	$10 < \frac{135}{13} < 11$	10	10
au dixième	$10,3 < \frac{135}{13} < 10,4$	10,3	10,4
au centième	$10,38 < \frac{135}{13} < 10,39$	10,38	10,38
au millième	$10,384 < \frac{135}{13} < 10,385$	10,384	10,385

attention au chiffre 5 !

prenons par exemple le nombre $\frac{33}{8}$.

33 : 8 = 4,125. **L'arrondi au centième de** $\frac{33}{8}$ est **4,13**

4,12 et 4,13 sont pourtant aussi proches de 4,125.
Par convention, on prend la valeur approchée par excès !

IV) Enchaînements d'opérations :

Rappel :

Dans une suite d'opérations,

- on effectue **d'abord** les calculs **entre parenthèses**
- on effectue **ensuite** les calculs **en tenant compte des priorités** (la multiplication et la division sont prioritaires)
- quand des opérations ont **le même niveau de priorité**, on effectue les calculs **de gauche à droite**

Ex :

A = 24 + 7 x **(3 – 11)** – 5

On effectue d'abord les calculs entre parenthèses !

A = 24 + **7 x (–8)** – 5

La multiplication est prioritaire !

A = **24 +(– 56)** – 5

Il ne reste que des additions et des soustractions, j'effectue de gauche à droite !

A =– 32 – 5

A =**– 37**

Ex :

B = **(–3 + 5)** + 14 : (–7) + 5^3

B = 2 + **14 : (–7)** + $\mathbf{5^3}$

5^3 a le même niveau de priorité que la division. Il s'agit d'un produit. 5^3 = 5 x 5 x 5

B = **2 + (–2)** + 125

B =**0** + 125

B =125

Probabilité

l'expérience est **aléatoire**. On ne peut pas prévoir avec certitude l'issue qu'on va obtenir !

I) Notion de fréquence d'une issue:

Considérons l'expérience aléatoire suivante : 

On lance un dé non truqué. On regarde ensuite le nombre de points figurant sur la face supérieure. Les issues sont 1, 2, 3, 4, 5, 6.
On reproduit l'expérience 100 fois.
Pour cela, nous allons utiliser un logiciel de simulation conçu à partir d'un tableur :

Le logiciel a été réglé pour effectuer automatiquement et aléatoirement 100 lancers. Voici le tableau regroupant les résultats.

AVEC UN DÉ :

Face tirée

Nb de lancers

Lancers manuels

RAZ

Lancers automatiques

RAZ

100

Faces :	1	2	3	4	5	6	Total
Nb de tirages	14	16	18	19	18	15	100
fréquence d'apparition (%)	14,0%	16,0%	18,0%	19,0%	18,0%	15,0%	100%
fréquence d'apparition	0,14	0,16	0,18	0,19	0,18	0,15	1
fréquence d'apparition (en sixièmes)	$\frac{0,84}{6}$	$\frac{0,96}{6}$	$\frac{1,08}{6}$	$\frac{1,14}{6}$	$\frac{1,08}{6}$	$\frac{0,90}{6}$	$\frac{6,00}{6}$

La fréquence d'apparition de 4 est d'environ 0,19 soit 19%.
La fréquence de l'issue 4 a été d'environ 0,19 sur cette série de 100 lancers.

II) Lien entre la fréquence d'une issue et sa probabilité:

propriété : Si on répète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, **la fréquence d'une issue** est **très proche de sa probabilité**.

Ex : Nous allons reproduire l'expérience aléatoire précédente 1000 fois grâce au logiciel de simulation.

AVEC UN DÉ :

Face tirée

Nb de lancers

Lancers manuels

RAZ

Lancers automatiques

RAZ

1000

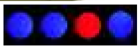
Faces :	1	2	3	4	5	6	Total
Nb de tirages	62	58	40	52	61	57	330
fréquence d'apparition (%)	18,8%	17,6%	12,1%	15,8%	18,5%	17,3%	100%
fréquence d'apparition	0,62	0,58	0,40	0,52	0,61	0,57	1
fréquence d'apparition (en sixièmes)	$\frac{1,13}{6}$	$\frac{1,05}{6}$	$\frac{0,73}{6}$	$\frac{0,95}{6}$	$\frac{1,11}{6}$	$\frac{1,04}{6}$	$\frac{6,00}{6}$
Probabilité de l'issue	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

La fréquence de l'issue 4 est de $\frac{1,04}{6}$.

Elle est pratiquement égale à la probabilité de l'issue 6 qui est $\frac{1}{6}$!

III) Simuler une expérience aléatoire avec un tableur :

aléatoire vient du latin, alea signifiant "hasard", c'est l'instruction que nous allons utiliser avec le tableur !

Considérons l'expérience aléatoire suivante : 

On tire au hasard une boule dans un sac contenant 3 boules bleues, une boule rouge, une boule verte. On regarde la couleur de la boule obtenue.
Nous allons simuler cette expérience 300 fois à l'aide du tableur.

=SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;4)=1;"R";"B")

alea est l'instruction "hasard". alea.entre.bornes(1,4) signifie "tirage au hasard d'un chiffre compris entre 1 et 4". Si(alea.......(...)=1,"R";"B") signifie "si la boule tirée est la numéro 1 on marque R (c'est la boule rouge), dans les autres cas, on marque B (c'est une boule bleue)".

on recopie la cellule A1 jusqu'à J30, on a donc reproduit 300 fois

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
2	B	R	R	B	B	B	B	B	B	B
3	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
4	B	B	B	B	R	R	B	R	R	R
5	R	B	B	B	B	B	B	B	B	R
6	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B
7	B	B	B	B	B	R	B	R	B	B
8	B	R	B	B	B	B	B	B	R	B
9	B	B	B	R	B	B	R	B	B	B
10	R	B	B	B	R	B	B	B	B	B
11	B	B	B	R	B	B	R	B	B	B
12	B	R	B	B	B	B	R	R	B	B
13	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B
14	B	B	B	B	B	B	B	B	R	B
15	B	R	B	B	B	B	B	R	B	B
16	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B
17	B	B	B	R	B	B	B	R	B	B
18	B	B	B	B	B	B	R	B	R	R
19	B	B	B	R	R	B	B	R	B	B
20	B	B	R	B	B	B	R	B	B	B
21	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B
22	B	B	R	B	B	B	R	B	B	B
23	R	B	R	B	R	B	B	R	B	B
24	B	B	B	B	B	B	B	B	R	R
25	R	B	B	B	B	B	B	B	B	R
26	B	R	B	B	B	B	B	B	B	B
27	B	R	B	R	B	B	B	B	B	B
28	B	R	B	B	B	B	B	R	R	B
29	R	R	B	B	B	B	R	B	B	B
30	B	B	B	B	B	B	R	R	R	B

L	M	N
couleur	effectif	fréquence
rouge	61	0,20
bleue	239	0,79

NB sert à compter le nombre de cellules. On pose ensuite une condition avec SI. Les cellules comptées doivent être dans la zone A1:J30 et indiquer "R" On obtient ainsi l'effectif des tirages de la boule rouge.

=NB.SI(A1:J30;"R")

=NB.SI(A1:J30;"B")

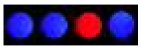
=M3/300

Pour avoir la fréquence de l'issue "bleue", on divise le contenu de la cellule M3 (effectif des tirages d'une boule bleue) par l'effectif total des tirages(300).

La fréquence de l'issue "rouge" est d'environ 0,2.
Elle est très proche de la probabilité d'obtenir une boule rouge (une chance sur 4) soit $\frac{1}{4}$ = 0,25. Plus on augmente le nombre d'expériences, plus la fréquence se rapproche de la probabilité.

IV) Simuler une expérience aléatoire avec une calculatrice :

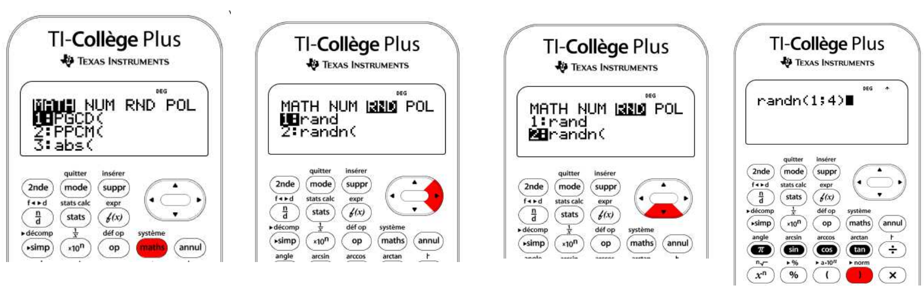
> random signifie "aléatoire" en anglais. C'est l'instruction que nous allons utiliser avec les calculatrices (RND) !

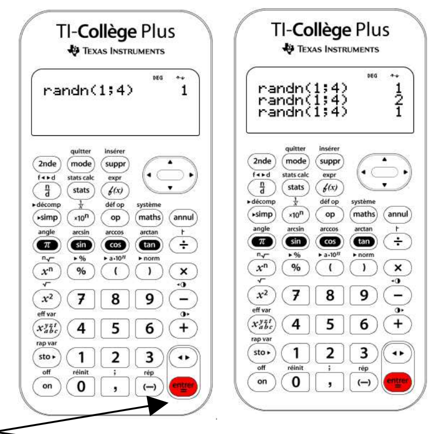
Reprenons l'expérience précédente : 

On tire au hasard une boule dans un sac contenant 3 boules bleues, une boule rouge, une boule verte. On regarde la couleur de la boule obtenue.

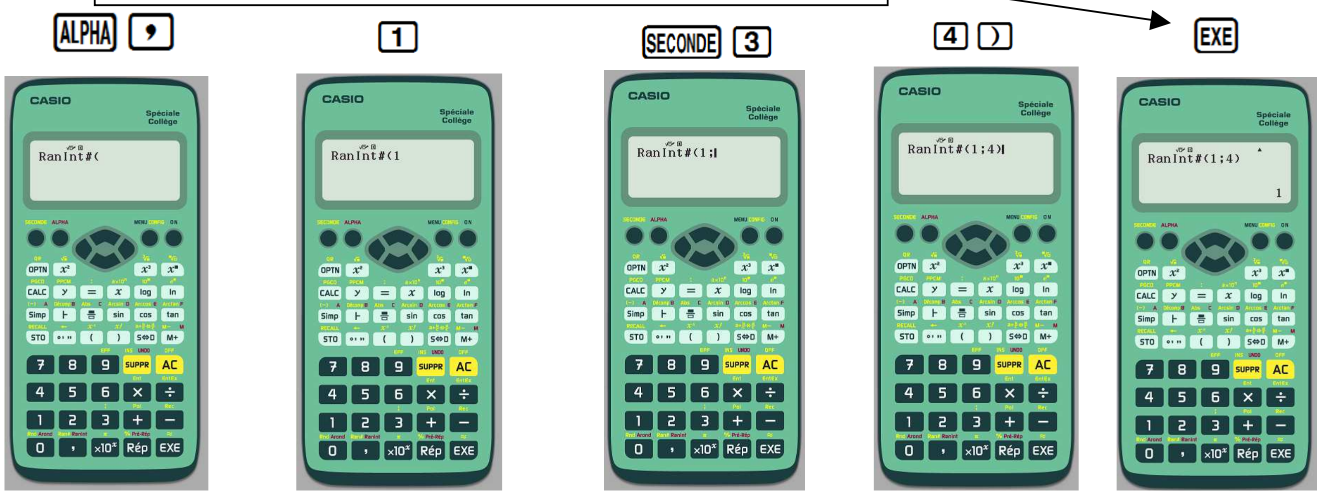
La calculatrice ne travaille pas avec des couleurs mais avec des nombres.
Nous allons donc simuler l'expérience en associant un nombre entier à chaque couleur.
Nous demanderons ensuite à la calculatrice de "choisir" au hasard un nombre parmi ceux-ci.

boule	première boule bleue	deuxième boule bleue	troisième boule bleue	boule rouge
nombre associé	1	2	3	4





> à chaque fois qu'on appuie sur la touche "enter" ou "exe" la calculatrice tire au hasard un entier compris entre 1 et 4. Il suffit de noter ensuite les résultats. Si on obtient 2, 3, 4 cela correspond à une boule bleue. Si on obtient 1, il s'agit d'une boule rouge.



Proportionnalité

Rappels :

- "Le coût de l'achat de baguettes de pain est **proportionnel** au nombre de baguettes achetées. Si j'achète **deux fois plus** de baguettes, je paierai **deux fois plus**"

- Avec un **tableau de proportionnalité**, on obtient chaque nombre d'une ligne en multipliant le nombre correspondant de l'autre ligne **par un même nombre**.

  Ex : Voici une situation proportionnelle représentée sur ce tableau :

Nombre de boîtes	2	3	4
Masse en kg	**10**	**15**	**20**

x 0,2 ; x 5

Ce tableau est un **tableau de proportionnalité**.

2 x 5 = 10   3 x 5 = 15   4 x 5 = 20

Le **coefficient de proportionnalité** est **5** (masse d'une boîte)

> Attention, **0,2** $\left(\frac{2}{10} \text{ ou } \frac{3}{15} \text{ ou } \frac{4}{20}\right)$ est aussi un **coefficient de proportionnalité** !

I) Caractérisation graphique d'une situation proportionnelle :

Propriété : **si** une situation est proportionnelle **alors** les points de sa représentation graphique sont alignés avec l'origine du repère.

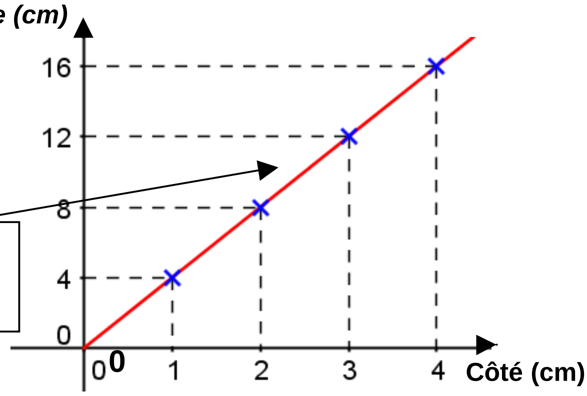
Ex : Le périmètre d'un carré est proportionnel à la longueur d'un côté.

Côté (cm)	0	1	2	3	4
Périmètre (cm)	**0**	**4**	**8**	**12**	**16**

x 4

Traçons la représentation graphique

Périmètre (cm)

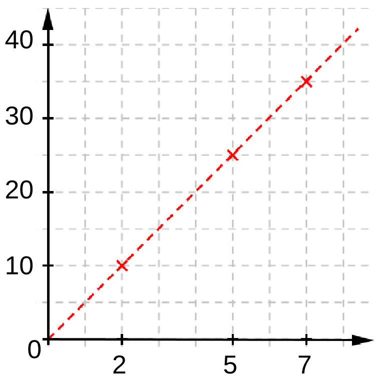


> «Tous les points de la courbe sont alignés avec l'origine du repère. Nous avons obtenu une droite passant par l'origine du repère.

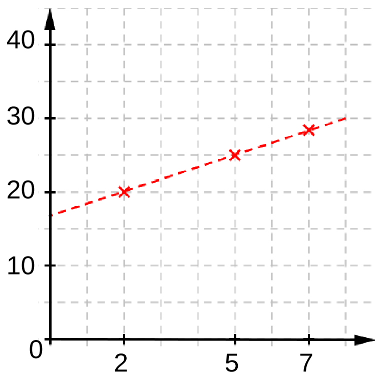
Propriété : **si** les points de sa représentation graphique sont alignés avec l'origine du repère **alors** la situation est proportionnelle.

> Cette propriété est la **réciproque** de la précédente

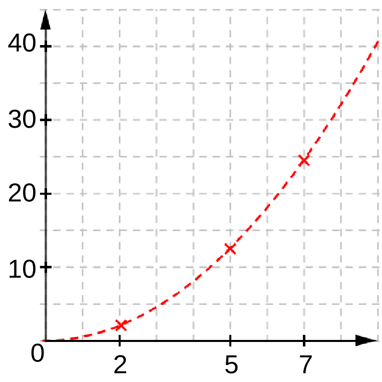
Ex :



graphique 1



graphique 2



graphique 3

▶ Seul **le graphique 1** correspond à une situation proportionnelle. **Les points sont alignés avec l'origine du repère.**

▶ Dans **le graphique 2**, **les points ne sont pas alignés avec l'origine du repère**. La situation n' est pas proportionnelle.

▶ Dans **le graphique 3**, **les points sont pas alignés**. La situation n' est pas proportionnelle.

II) Quatrième proportionnelle – égalité des produits en croix :

Reprenons la situation proportionnelle du paragraphe précédent.

Côté (cm)	0	1	2	3	4
Périmètre (cm)	**0**	**4**	**8**	**12**	**16**

x 4

On a : 2 x 12 = 3 x 8 = 24

1	**4**
4	**16**

On a : 1 x 16 = 4 x 4 = 16

Si on prend **deux colonnes quelconques** d'un tableau de proportionnalité, **les produits en croix** sont égaux.

Propriété : Si un tableau est un tableau de **proportionnalité** alors **les produits en croix** sont **égaux**

a, b, c, d désignent quatre nombres relatifs.
Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité.

a	**c**
b	**d**

ad = **bc**

Cette propriété est appelée l'égalité des produits en croix.

Ex : Pour faire de la confiture de mirabelles, il faut ajouter 700g de sucre à 1 kg de fruits. Quelle est la quantité de sucre à ajouter à 750 g de fruits ?

La situation est proportionnelle (si j'utilise deux fois plus de fruits, je dois mettre deux fois plus de sucre !)

Soit x la quantité de sucre nécessaire

Fruits (g)	**1000**	**750**
Sucre (g)	**700**	x

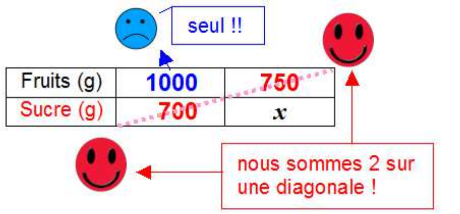
x est la **quatrième proportionnelle** (inconnue)

1000 x x = 750 x 700 (égalité des produits en croix)

Donc $x = \dfrac{750 \text{ x } 700}{1000}$ = **525g**

Pour 750g de fruits, il faudra 525g de sucre

Pour trouver la quatrième proportionnelle, je multiplie les deux nombres sur la diagonale puis je divise par le nombre qui est tout seul !



II) Pourcentages :

calculer un pourcentage revient à un calcul de proportionnalité

Ex : **Parmi les 24 élèves d'une classe, 9 sont demi-pensionnaires. Calculer le pourcentage d'élèves demi-pensionnaires dans la classe.**

Evaluer le **pourcentage** d'élèves demi-pensionnaires consiste à imaginer que la classe compte 100 élèves en conservant **la même proportion** d'élèves demi-pensionnaires.
Il s'agit bien d'une situation proportionnelle. Utilisons les produits en croix.

Soit x le pourcentage d'élèves

demi-pensionnaires	**9**	x
total des élèves	**24**	**1 00**

$x = \dfrac{9 \text{ x } 100}{24} = 37{,}5$

Il y a 37,5% d'élèves demi-pensionnaires dans la classe.

Ex : **Un gâteau préparé par Julien contient 35% de chocolat. Quelle quantité de chocolat a t'il utilisé pour un gâteau de 425g ?**

Soit x la quantité de chocolat

masse de chocolat (g)	**35**	x
Masse du gâteau (g)	**100**	**425**

100 x x = 35 x 425 Donc $x = \dfrac{35 \text{ x } 425}{100}$ = **148,75g**

Pour un gâteau de 425g, il faudra 148,75g de chocolat.

III) Vitesse moyenne :

définition : la **vitesse moyenne** d'un objet en mouvement est le **quotient** de la **distance parcourue** par **la durée du parcours**.

C'est la vitesse qu'il aurait eu en parcourant la même distance en gardant toujours la même vitesse !

remarque : En supposant que l'objet en mouvement a **toujours la même vitesse** (la vitesse moyenne), la situation est proportionnelle.
La **distance parcourue** est **proportionnelle** à la **durée du parcours**.

Ex :

▶ **Un train circule pendant 4,5 heures à la vitesse moyenne de 70 km/h.**
Quelle est la distance parcourue ?

La situation est proportionnelle

Distance (en km)	**70**	x
Durée du parcours (en h)	**1**	**4,5**

$x = \dfrac{70 \text{ x } 4,5}{1} = \mathbf{315\text{ km}}$ La **distance parcourue** est **315 km**.

▶ **Un routier a effectué 252 km à 63 km/h de moyenne.**
Quelle est la durée du parcours ?

La situation est proportionnelle

Distance (en km)	**252**	63
Durée du parcours (en h)	x	**1**

$x = \dfrac{252 \text{ x } 1}{63} = \mathbf{4\text{ h}}$ La **durée du parcours** est **4 heures**.

▶ **Un automobiliste parcourt 280 km en 4 heures. Quelle est sa vitesse moyenne ?**

La distance parcourue est proportionnelle à la durée du parcours.

Distance (en km)	**280**	x
Durée du parcours (en h)	**4**	**1**

La **vitesse moyenne** en km/h correspond à **la distance parcourue en 1 heure**.

$x = \dfrac{280 \text{ x } 1}{4} = $ **70 km** donc la vitesse moyenne est **70km/h**

PUISSANCES

I) Puissances d'un nombre relatif :

► avec un exposant entier positif :

définition : Soit **a** un nombre relatif et **n** un entier supérieur ou égal à 2

a^n est le produit de n facteurs égaux à a

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a}_{\text{le produit comprend } \mathbf{n} \text{ facteurs}}$$

n est l'exposant de a

a^n est une puissance du nombre a

a^n se lit « a puissance n » ou « a exposant n »

$a^0 = 1$ $\quad$ $a^1 = a$ $\quad$ a^2 se lit "a au carré" $\quad$ a^3 se lit "a au cube"

par convention (règles décidées par les mathématiciens !)

Ex :

$2^5 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{5 facteurs}} = 32$

$(-5)^3 = \underbrace{(-5) \times (-5) \times (-5)}_{\text{3 facteurs}} = (-125)$

$10^4 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\text{4 facteurs}} = 10\ 000$

$4^0 = 1$

$(-3{,}2)^1 = -3{,}2$

► avec un exposant entier strictement négatif :

définition : **a** étant un nombre relatif non nul et **n** un entier positif non nul,

a^{-n} est l'inverse de a^n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times \ldots\ldots \times a \times a}$$

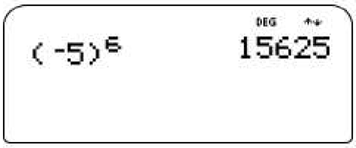
$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

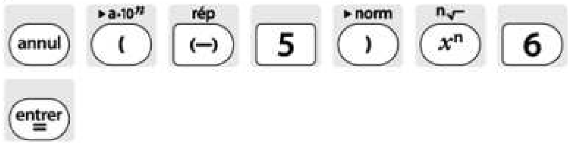
$\underline{\text{Ex :}}\ 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$ $\qquad (-2)^{-4} = \dfrac{1}{(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)} = \dfrac{1}{(-2)^4} = \dfrac{1}{16}$

- la puissance d'un nombre positif est toujours positive.
- la puissance d'un nombre négatif est positive si l'exposant est pair.
- la puissance d'un nombre négatif est négative si l'exposant est impair

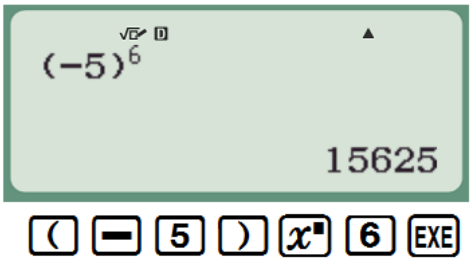
Ex : $(-5)^6$ est positif $\qquad (-7,8)^{-8}$ est positif $\qquad 9^7$ est positif $\qquad (-4,1)^3$ est négatif

avec la calculatrice :



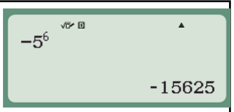


TI-collège Plus



Casio fx92 Spéciale Collège

attention aux parenthèses !
$(-5)^6 \neq -5^6 \quad -5^6 = 0 - 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 0 - 15625 = -15625$!



II) Puissances de 10 :

a) calculer une puissance de 10 :

Propriété : Pour tout entier positif n non nul, on a :

$$10^{n} = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \ldots\ldots\ldots \times 10 \times 10}_{\text{le produit comprend } \mathbf{n} \text{ facteurs}} = \underbrace{1000\ldots\ldots\ldots00}_{\mathbf{n} \text{ zéros}}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,000\ldots\ldots01}_{\mathbf{n} \text{ zéros}}$$

Ex : $10^4 = 1\underbrace{0000}_{\mathbf{4} \text{ zéros}}$ $\qquad 10^{-6} = \underbrace{0,00000}_{\mathbf{6} \text{ zéros}}1$ $\qquad 10^1 = 10$ $\qquad 10^0 = 1$

b) préfixes :

Les préfixes sont utilisés pour simplifier l'écriture et le nom de mesures utilisant des puissances de 10 dans leur unité.

en informatique, l'unité d'information est l'octet.
Une clé USB d' un gigaoctet contient 10^9 octets (un milliard d'octets !)
giga est un **préfixe**

préfixe	giga	méga	kilo	milli	micro	nano
symbole	G	M	k	m	μ	n
puissance de 10	10^9	10^6	10^3	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

cette lettre grecque se lit «mu»

Ex :
Un micromètre (noté 1 μm) est un millionième de mètre soit 10^{-6} m
En biologie, le micromètre est l'ordre de grandeur des cellules.

III) Écriture scientifique d'un nombre décimal :

a) exprimer un nombre à l'aide de puissances de 10 :

propriété : n désigne un nombre positif

- On multiplie un nombre décimal par $\mathbf{10^n}$ en déplaçant la virgule de **n rangs vers la droite**.

Ex : $4{,}567 \times 10^2 = 456{,}7$ $\quad$ $3{,}4 \times 10^7 = 34\ 000\ 000$

Si cela est nécessaire, on complète avec des zéros !

- On multiplie un nombre décimal par $\mathbf{10^{-n}}$ en déplaçant la virgule de **n rangs vers la gauche**.

Ex : $4{,}567 \times 10^{-2} = 0{,}04567$ $\quad$ $3{,}4 \times 10^{-7} = 0{,}00000034$

b) écrire un nombre en notation scientifique :

définition : la notation scientifique d'un nombre décimal est son écriture sous la forme $\mathbf{a \times 10^p}$ où a est un nombre décimal ayant **un seul chiffre non nul avant la virgule.**

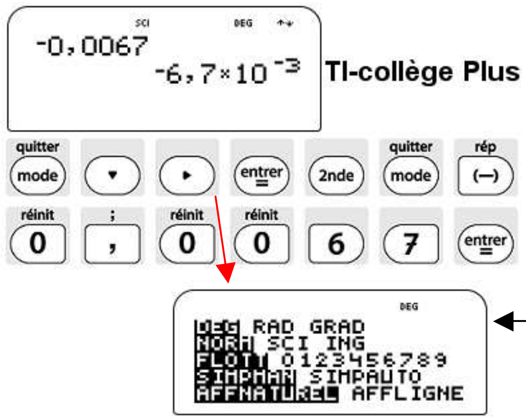
$1 \leqslant \mathbf{a} < \mathbf{10}$

Ex :
L'écriture scientifique de **56 000** est : $5{,}6 \times 10^4$
L'écriture scientifique de **345** est : $3{,}45 \times 10^2$
L'écriture scientifique de **– 0,0067** est : $-6{,}7 \times 10^{-3}$

Astuce : j'écris le nombre en mettant un chiffre non nul devant la virgule.
Ici j'écris donc **3,45**. Ensuite je cherche la puissance de 10 par laquelle je dois multiplier **3,45** pour retrouver le nombre de départ **345** !

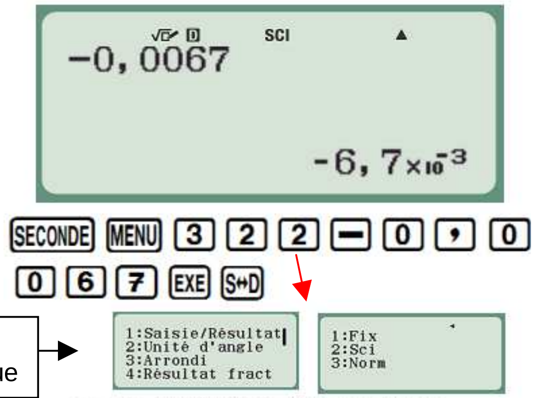
<u>avec la calculatrice</u> :

Écrivons **– 0,0067** en notation scientifique



TI-collège Plus

calculatrice en mode scientifique



Casio fx92 Spéciale Collège

IV) <u>Opérations avec des puissances :</u>

▶ $3^2 \times 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{2+4} = 3^6$ ◀ **Les exposants s'ajoutent : 2 + 4 = 6 !!»**

▶ $\dfrac{(-4)^2}{(-4)^5} = \dfrac{\cancel{(-4)} \times \cancel{(-4)}}{\cancel{(-4)} \times \cancel{(-4)} \times (-4) \times (-4) \times (-4)} = \dfrac{1}{(-4)^3} = (-4)^{-3}$ ◀ **Les exposants se retranchent : 2 – 5 = –3 !!**

▶ $(5^3)^2 = 5^3 \times 5^3 = 5^{2\times3} = 5^6$ ◀ **Les exposants se multiplient : 2 X 3 = 6 !!**

$15 - 4 \times 3^2$	$7 + 6^2 - 5 : 10^2$
$= 15 - 4 \times 9$	$= 7 + 36 - 5 : 100$
$= 15 - 36$	$= 7 + 36 - 0{,}05$
$= -11$	$= 42{,}95$

Dans une expression sans parenthèse, on calcule d'abord les puissances.

<u>propriété :</u> quels que soient n et p deux entiers relatifs, on a :

$\mathbf{10^n \times 10^p = 10^{n+p}}$ $\qquad \mathbf{\dfrac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}}$ $\qquad \mathbf{(10^n)^p = 10^{n \times p}}$

<u>Ex :</u> $10^4 \times 10^3 = 10^7$ $\qquad \dfrac{10^9}{10^4} = 10^{9-4} = 10^5$ $\qquad (10^3)^2 = 10^{2\times3} = 10^6$

$10^{-5} \times 10^8 = 10^3$ $\qquad \dfrac{10^{-5}}{10^9} = 10^{-14}$ $\qquad (10^{-7})^3 = 10^{-21}$

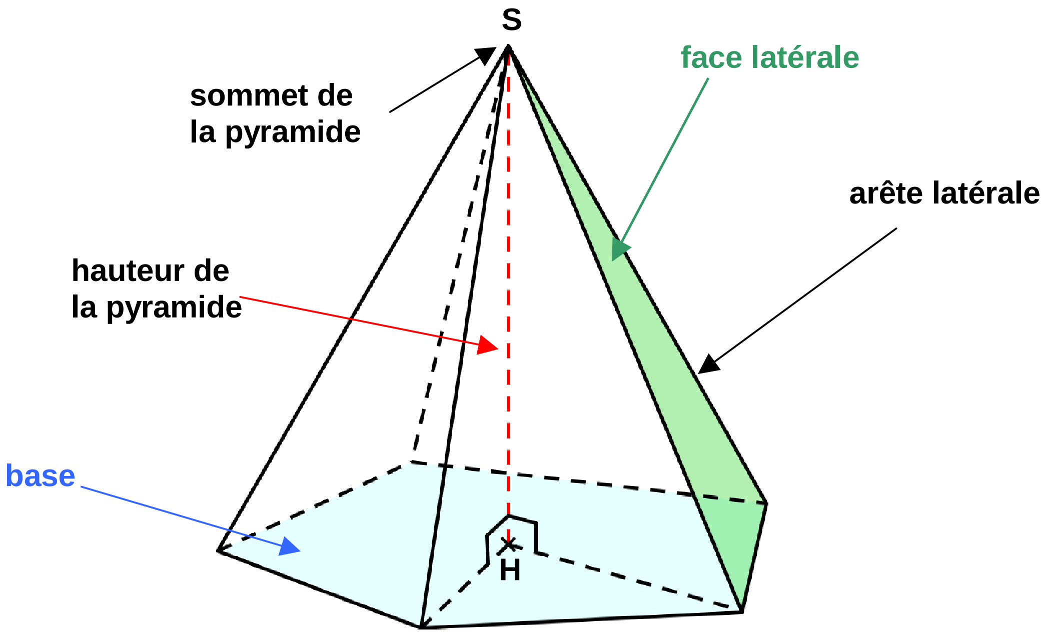
Pyramides – Cônes de révolution

I) Pyramide

définition :

Une **pyramide** est un solide dont :

- une face est un polygone : **la base**
- les autres faces sont des triangles : **les faces latérales**
- les faces latérales ont un point commun : **le sommet de la pyramide**



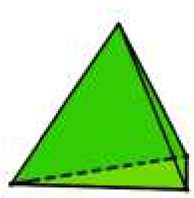
Cette pyramide a **6 sommets**, **6 faces** et **10 arêtes.**
La base **est un pentagone !**
La hauteur **[SH] est perpendiculaire au plan de la base**.

Attention, on peut aussi appeler hauteur **la longueur SH**. Ici, la hauteur de la pyramide est de 6,8 cm

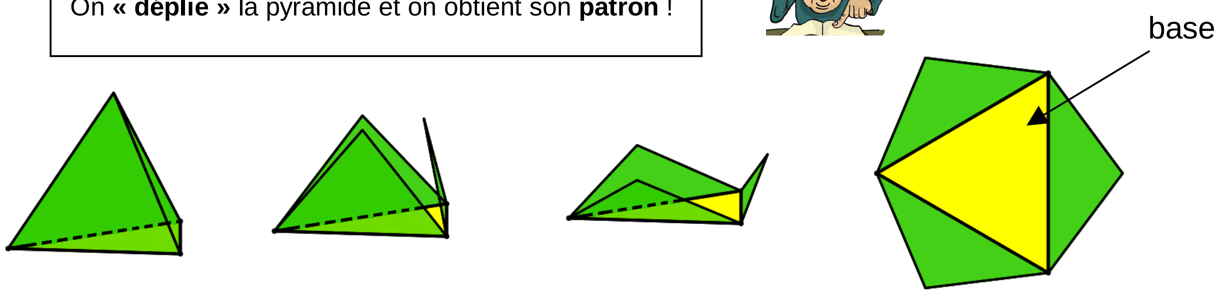
Ex :

Voici une **pyramide à base triangulaire** :

On peut l'appeler aussi **un tétraèdre**

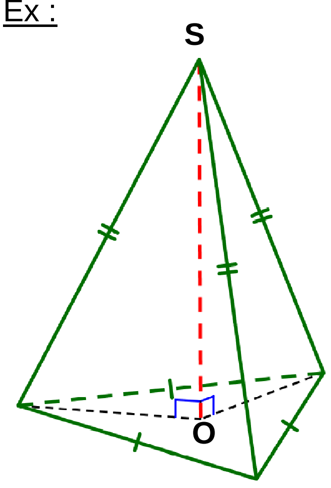


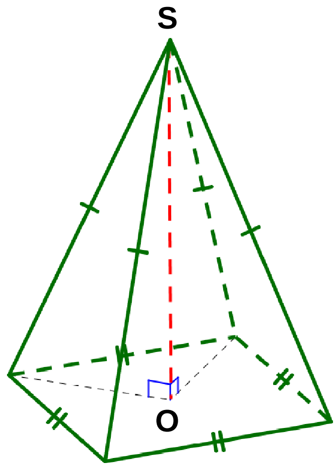
On **« déplie »** la pyramide et on obtient son **patron** !

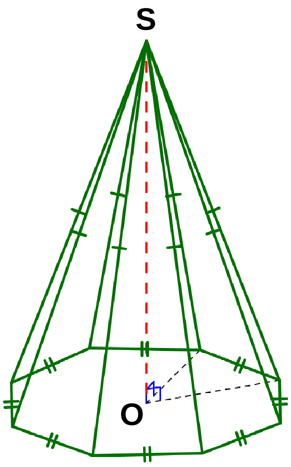


<u>définition :</u>
Une **pyramide régulière** est une pyramide dont **toutes les faces latérales sont des triangles isocèles superposables**

<u>Ex :</u>







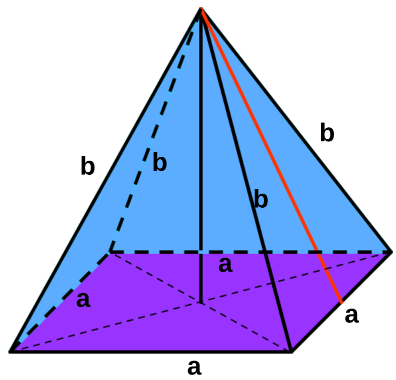
pyramide régulière à **base triangulaire**

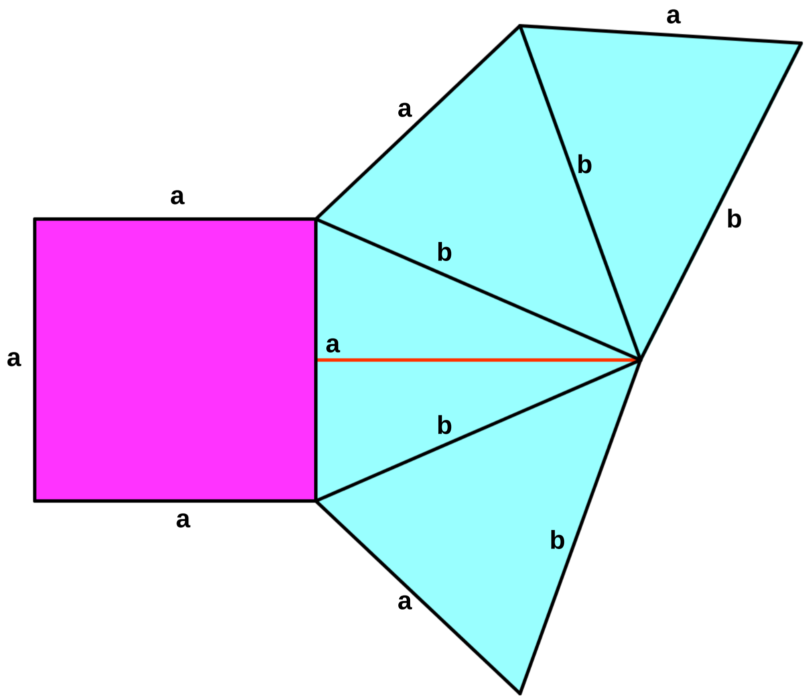
pyramide régulière à **base carrée**

pyramide régulière à **base octogonale**

O est le **centre des différents polygones** (bases) !

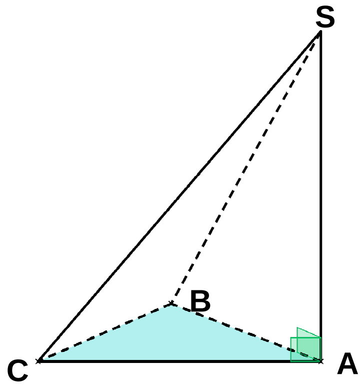
<u>Ex :</u>
<u>Voici une **pyramide régulière à base carrée et un patron possible** :</u>





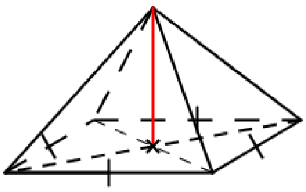
remarques :

► Une pyramide peut avoir sa hauteur confondue avec une arête.
La **hauteur** de la pyramide **ABCS** est son **arête [SA]**

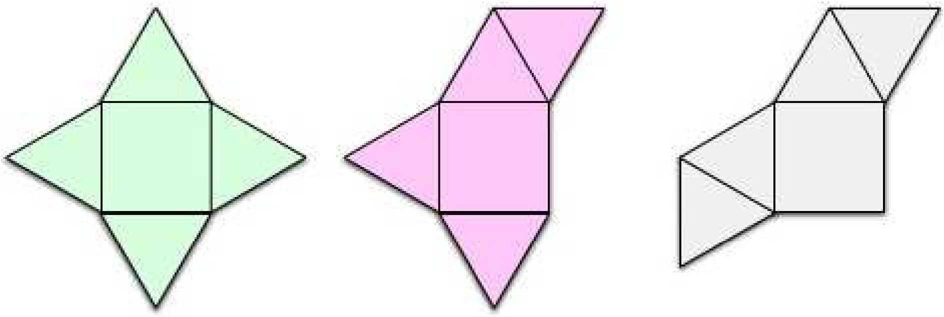


Pour nommer une pyramide à l'aide du nom de ses points, je **nomme ceux de la base puis le sommet** !

► Une pyramide a plusieurs patrons possibles.

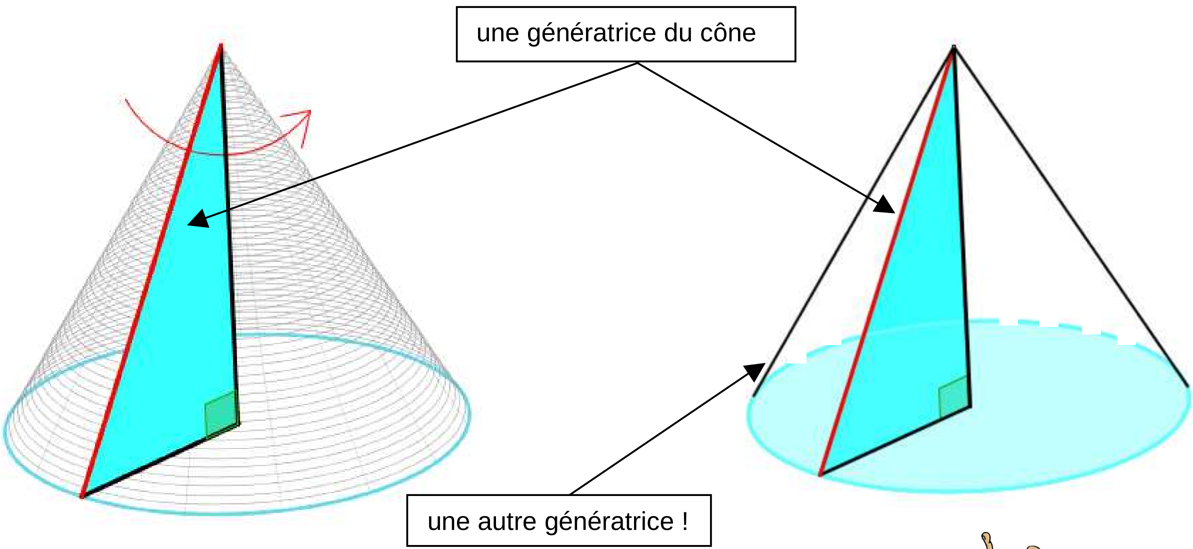


pyramide régulière à base carrée



II) Cône de révolution

définition : un **cône de révolution** est le solide obtenu **en faisant tourner un triangle rectangle** autour d'un de ses côtés droits

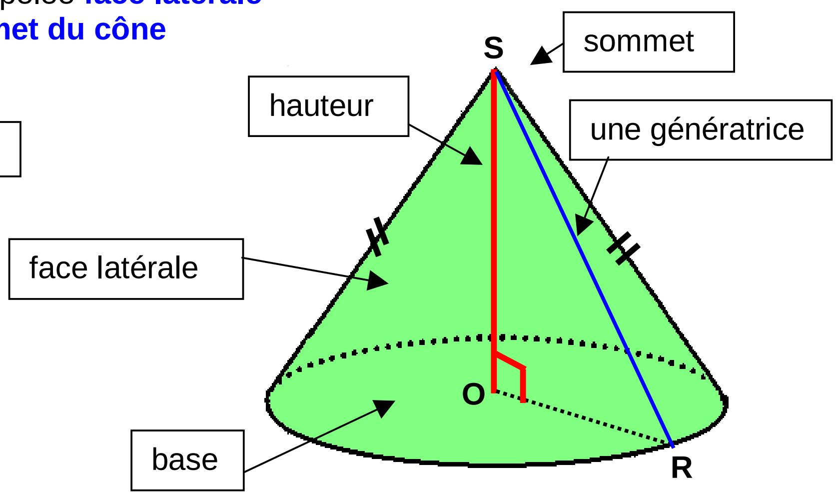


"génératrice" vient du latin "generator" signifiant "celui qui produit" !
En faisant tourner une génératrice, je "produis" le cône !!

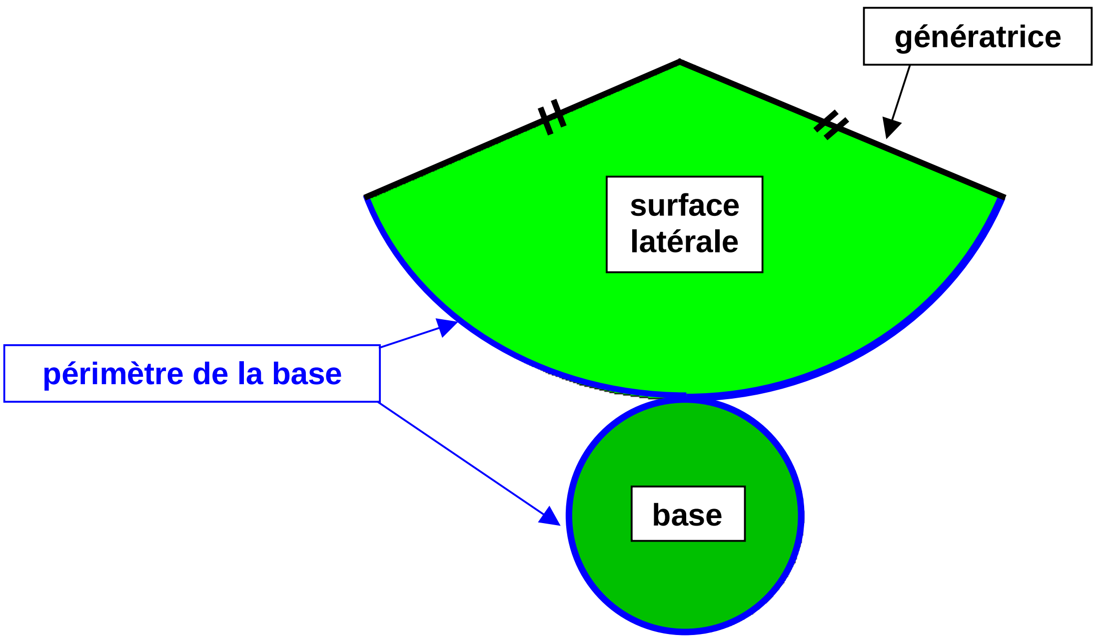
<u>définition :</u> un **cône de révolution** est composé :

- d'un disque :**la base du cône**
- d'une surface courbe appelée **face latérale**
- d'un **point** appelé **sommet du cône**

[OR] est le rayon du disque de base **!**



<u>Patron de cône :</u>



III) <u>Volume d'une pyramide et d'un cône de révolution</u>

<u>définition :</u> le **volume d'une pyramide** ou d'un **cône de révolution** est égal **au tiers du produit de l'aire de la base du solide par la hauteur du solide**

$$V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

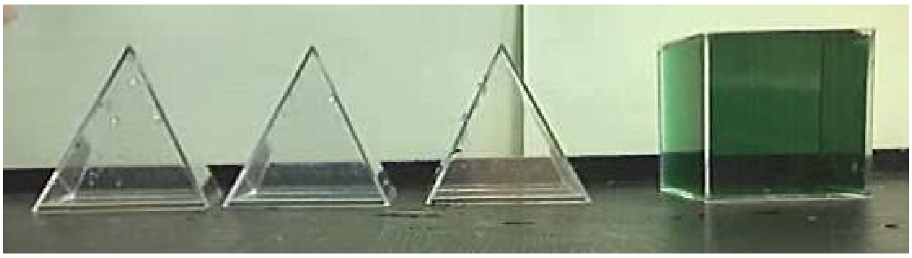
Le volume d'un cône est 3 fois plus petit que le volume d'un cylindre de même base et de même hauteur.

On peut le constater à l'aide d'une expérience !

des cônes et un cylindre ayant les mêmes base et la même hauteur

il faut 3 cônes pour vider le cylindre rempli de mais !!

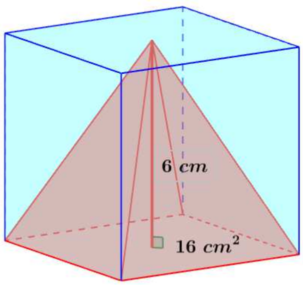
de même avec la pyramide !!



il faut 3 pyramides de même base et de même hauteur que celles de ce pavé droit pour remplir d'eau le pavé droit !!

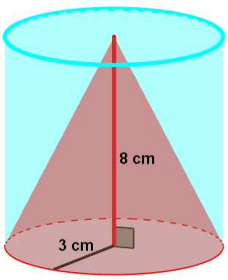
Pas besoin de formules supplémentaires !!

- Le volume d'une **pyramide** est **3 fois plus petit** que celui d'un **pavé droit** de même base et même hauteur. Je calcule le volume d'un pavé droit et je divise par 3 !
- Le volume d'un **cône** est **3 fois plus petit** que celui d'un **cylindre** de même base et même hauteur. Je calcule le volume du cylindre et je divise par 3 !



volume de la pyramide

$V = (16 \times 6) : 3 = 32 \text{ cm}^3$



volume du cône

a) aire de la base

$A = \pi \times 3^2 \simeq 28{,}27 \text{ cm}^2$

b) volume

$V \simeq \dfrac{28{,}27 \times 8}{3} \simeq 75{,}38 \text{ cm}^3$

Ex :

Calculer le volume d'un cône de révolution de hauteur 5 cm et de rayon 3cm :

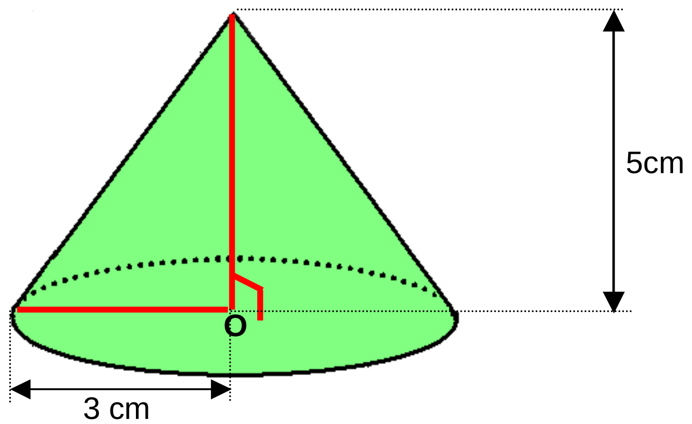
Soient $\mathscr{B}$ l'aire de la base, r le rayon et h la hauteur

On a :

$V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$

Donc $V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$

Donc $\mathbf{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 5 \simeq \mathbf{47,1\ cm^3}$



Calculer le volume d'une pyramide à base carrée. Le côté de la face carrée a pour longueur 3cm, la hauteur est 7 cm :

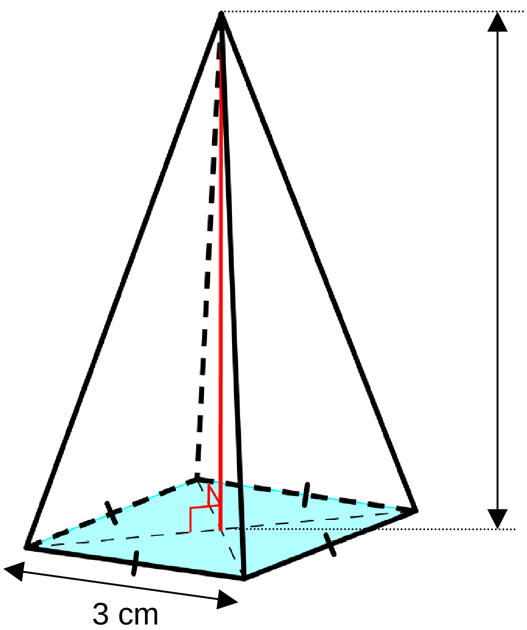
Soient $\mathscr{B}$ l'aire de la base, c le côté du carré, h la hauteur

On a :

$V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$

$V = \frac{1}{3} \times c^2 \times h$

$\mathbf{V} = \frac{1}{3} \times 3^2 \times 7 = \mathbf{21\ cm^3}$



Opérations en écriture fractionnaire

I) Quotients égaux (rappels) :

propriété : un quotient de deux nombres relatifs ne change pas en **multipliant** ou en **divisant** son **numérateur et** son **dénominateur par un même nombre non nul**.

a,b,c,d désignent quatre nombres relatifs avec b≠0 et c≠0, on a :

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a \times c}}{\mathbf{b \times c}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a : c}}{\mathbf{b : c}}$$

Ex : $\frac{-3}{2} = \frac{-3 \times 5}{2 \times 5} = \frac{-15}{10} = -\frac{15}{10}$ $\qquad$ $\frac{6}{-15} = \frac{6 : 3}{-15 : 3} = \frac{2}{-5}$

II) Addition et soustraction :

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres relatifs écrits en écriture fractionnaire,

a) si les dénominateurs sont égaux :

- on **additionne** (ou on **soustrait**) les **numérateurs**
- on **garde** le **dénominateur commun**

a,b,c désignent trois nombres relatifs avec c≠0, on a :

$$\frac{a}{\mathbf{c}} + \frac{b}{\mathbf{c}} = \frac{a+b}{\mathbf{c}} \quad ; \quad \frac{a}{\mathbf{c}} - \frac{b}{\mathbf{c}} = \frac{a-b}{\mathbf{c}}$$

Ex : $\frac{4}{7} + \frac{-2}{7} = \frac{4 + (-2)}{7} = \frac{2}{7}$ $\qquad$ $\frac{3}{11} - \frac{9,5}{11} = \frac{3 - 9,5}{11} = \frac{-6,5}{11}$

b) si les dénominateurs sont différents :

on doit d'abord **écrire** les deux nombres relatifs en écriture fractionnaire **avec le même dénominateur**

Ex :

a) $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$ $\qquad$ je cherche un multiple commun à 2 et 3. Je choisis 6.

$= \frac{3 \times 3}{2 \times 3} + \frac{5 \times 2}{3 \times 2}$ $\qquad$ j'utilise la propriété des quotients égaux.

$= \frac{9}{6} + \frac{10}{6}$ $\qquad$ j'effectue.

$= \frac{\mathbf{19}}{\mathbf{6}}$

b) $\frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{8}} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}} = \frac{-5 \times 3}{8 \times 3} - \frac{7 \times 4}{6 \times 4} = \frac{-15}{24} - \frac{28}{24} = -\frac{\mathbf{43}}{\mathbf{24}}$

III) Multiplication :

Pour multiplier deux nombres relatifs écrits en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

a,b,c,d désignent quatre nombres relatifs avec b≠0 et d≠0, on a :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Ex : $\frac{5}{7} \times \frac{-2}{3} = \frac{\mathbf{-10}}{\mathbf{21}}$ $\quad \frac{-7}{24} \times \frac{-8}{-13} = -\frac{7 \times 8}{24 \times 13} = -\frac{7 \times \cancel{8}}{3 \times \cancel{8} \times 13} = -\frac{7}{3 \times 13} = \frac{\mathbf{-7}}{\mathbf{39}}$

la méthode la plus efficace et la plus rapide est de déterminer **d'abord** le signe du résultat **puis** de simplifier éventuellement avant d'effectuer!

IV) Inverses - Division :

définition : Deux nombres sont **inverses** lorsque leur produit est égal à **1**

Ex :

- 2 et 0,5 sont deux nombres inverses car 2 x 0,5 = 1
- –5 et – 0,2 sont deux nombres inverses car –5 x –0,2 = 1
- 4 et $\frac{1}{4}$ sont deux nombres inverses car $4 \times \frac{1}{4} = \frac{\cancel{4} \times 1}{\cancel{4}} = 1$
- $\frac{3}{7}$ et $\frac{7}{3}$ sont deux nombres inverses car $\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{7}}{\cancel{7} \times \cancel{3}} = 1$

0 n' admet **pas d'inverse** !!

propriété : l'**inverse d'un nombre** non nul **a** est $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}$ (on le note aussi $\mathbf{a^{-1}}$)

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

Ex : L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$ $\quad$ L'inverse de –7 est $-\frac{1}{7}$ $\quad 3^{-1} = \frac{1}{3}$!

$3^{-1} = \frac{1}{3}$!

propriété : a et b deux nombres relatifs avec b≠0. L'**inverse** de $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ est $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{\cancel{a} \times \cancel{b}}{\cancel{b} \times \cancel{a}} = 1$$

Ex : L'inverse de $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}$ est $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}$. L'inverse de $\frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{9}}$ est $\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{-2}}$ ou $\frac{\mathbf{-9}}{\mathbf{2}}$ ou $-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}$

je mets le signe "-" au numérateur ou a dénominateur ou devant le trait de fraction

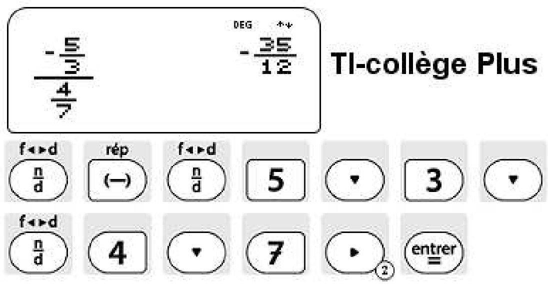
<u>propriété :</u> **Diviser par** un nombre relatif non nul**,** c'est **multiplier par son inverse**

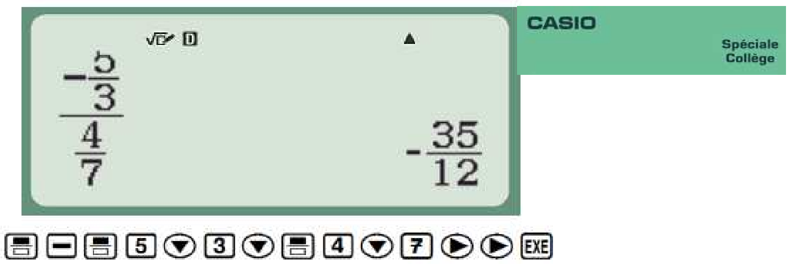
<u>a,b,c,d désignent quatre nombres relatifs avec b≠0, c≠0 et d≠0, on a :</u>

$a : b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ $\qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ $\qquad$ ou $\qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

<u>Ex :</u> $(-9) : 8 = (-9) \times \frac{1}{8} = -\frac{9}{8}$ $\qquad \frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$

$\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{4}{7}} = -\frac{5}{3} \times \frac{7}{4} = -\frac{35}{12}$ $\qquad \frac{\frac{7}{9}}{-5} = \frac{7}{9} \times \frac{1}{-5} = -\frac{7}{45}$





Statistiques

I) Vocabulaire (rappels)

le **caractère** étudié est la taille en cm.

la **population** étudiée est constituée de tous les minimes du club.

On a mesuré la taille des 12 minimes qui font du football dans un club.

Voici les résultats (en cm) :

valeurs extrêmes

$$\underbrace{\mathbf{137 \quad 145 \quad 138 \quad 137 \quad 142 \quad 138 \quad 142 \quad 138 \quad 145 \quad 138 \quad 137 \quad 139}}$$

la **série statistique** comprend **12 données. Son effectif total est 12.**

Les **valeurs** du caractère sont **les tailles différentes** obtenues.

Si un élève une moyenne de 18,5 en géographie, on peut se faire une idée de la hauteur de ces notes dans la matière.
La moyenne est un nombre permettant de situer la série. C'**est un indicateur de position.**

II) Moyenne d'une série statistique

a) définition de la moyenne :

définition : la **moyenne** d'une série statistique est égale au **quotient de la somme de toutes les données par l'effectif total**.

Ex : Reprenons la série précédente :
137 145 138 137 142 138 142 138 145 138 137 139

Calculons la taille moyenne des minimes du club :

$$\frac{137 + 145 + 138 + 137 + 142 + 138 + 142 + 138 + 145 + 138 + 137 + 139}{12}$$

$= \frac{1676}{12} \simeq$ **139,6** cm

La taille moyenne des joueurs minimes est d'environ **139,6 cm**

valeur approchée par défaut au dixième près !

on peut procéder plus rapidement en calculant autrement, voyons cela !

b) calcul de la moyenne en la pondérant :

Définition : Pour calculer la **moyenne pondérée** d'une série statistique :

- On **additionne** les **produits de chaque valeur par son effectif**
- On fait le **quotient de cette somme par l'effectif total**.

Ex : Reprenons notre exemple.
Pour travailler plus facilement, on peut dresser un tableau rassemblant les données:

Tailles (cm)	**137**	**138**	**139**	**142**	**145**
Effectif	**3**	**4**	**1**	**2**	**2**

prenons l'habitude de ranger les valeurs en ordre croissant !

$$m = \frac{3 \times 137 + 4 \times 138 + 1 \times 139 + 2 \times 142 + 2 \times 145}{12} \simeq 139{,}6 \text{ cm}$$

Cette moyenne est évidemment la même que précédemment. Dire qu'elle est "pondérée" fait référence au procédé employé pour la calculer. On va plus vite en regroupant les données de même valeur ! On dit qu'on pondère la moyenne par les effectifs.

III) Médiane d'une série statistique :

La médiane est un nombre permettant de situer la série.
C'**est un indicateur de position.**

définition : la **médiane M** est **un nombre partageant une série statistique** dont les données sont rangées en ordre croissant (ou décroissant) en **deux groupes de même effectif.**

Ex :
Voici les notes d'un groupe de 9 élèves lors d'un devoir :

5 - 6 – 11 – 13 – 6 – 14 – 12 – 8 – 13

Il faut d'abord ranger les nombres dans l'ordre croissant.

5 6 6 8 11 12 13 13 14

4 données — 11 est la médiane — 4 données

La moyenne de la série est : $\dfrac{5 + 2 \times 6 + 8 + 11 + 12 + 2 \times 13 + 14}{9} \simeq 9{,}7$

Ex :
Voici les notes d'un groupe de 6 élèves lors d'un devoir :

5 – 6 –13 – 14 – 16 – 18

3 données | 3 données

13,5 est la médiane

La moyenne de la série est : $\dfrac{5 + 6 + 13 + 14 + 16 + 18}{6} = 12$

« dans le cas d'un **nombre pair** de données !!!»

Ex :
Voici les notes d'un groupe de 8 élèves lors d'un devoir :

5 – 6 –10 – 11 – 11 – 14 – 16 – 18

4 données | 4 données

11 est la médiane

La moyenne de la série est : $\dfrac{5 + 6 + 10 + 2 \times 11 + 14 + 16 + 18}{8} = 11,3$

IV) Etendue d'une série statistique :

L'étendue est un nombre permettant de voir si la série a des valeurs extrêmes éloignées. C'**est un indicateur de dispersion.**

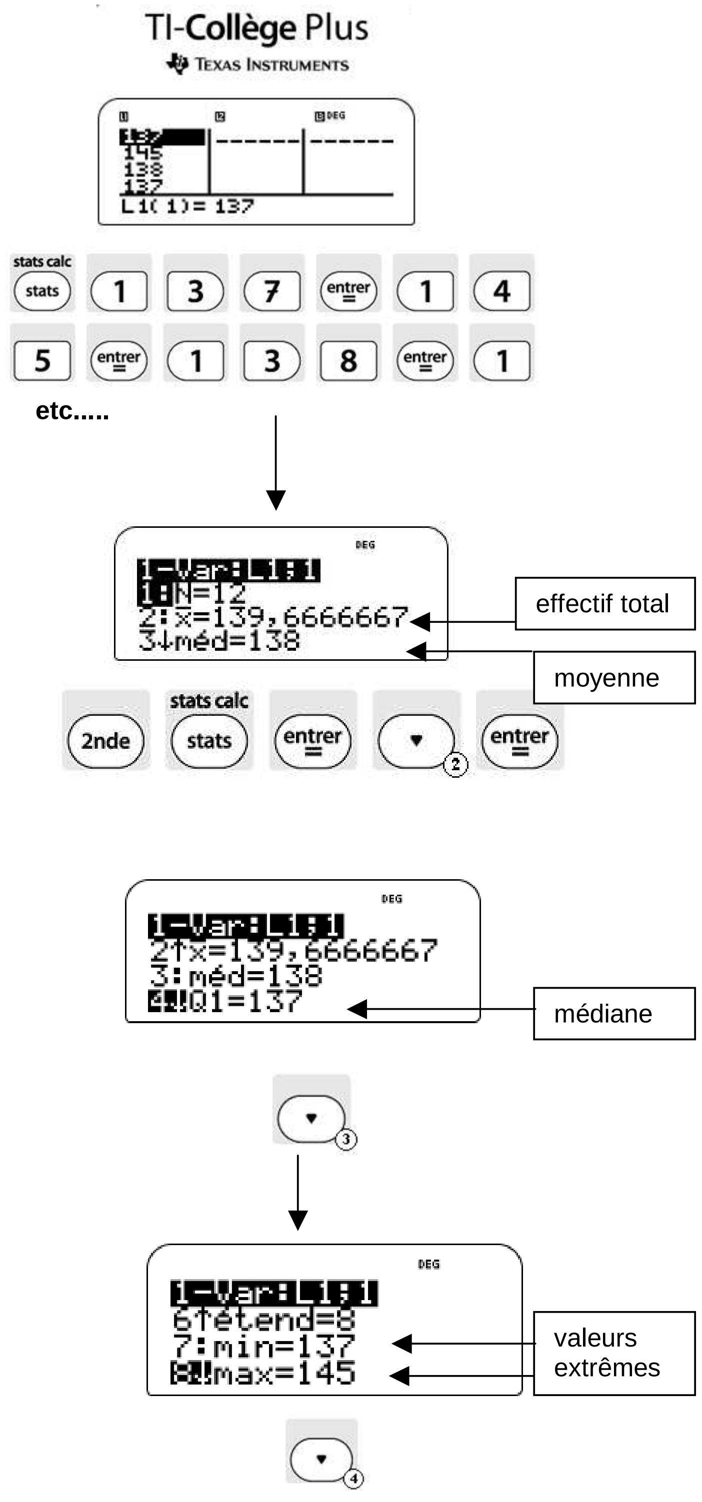
définition : **l'étendue d'une série statistique** est la **différence** entre la plus grande et la plus petite des valeurs.

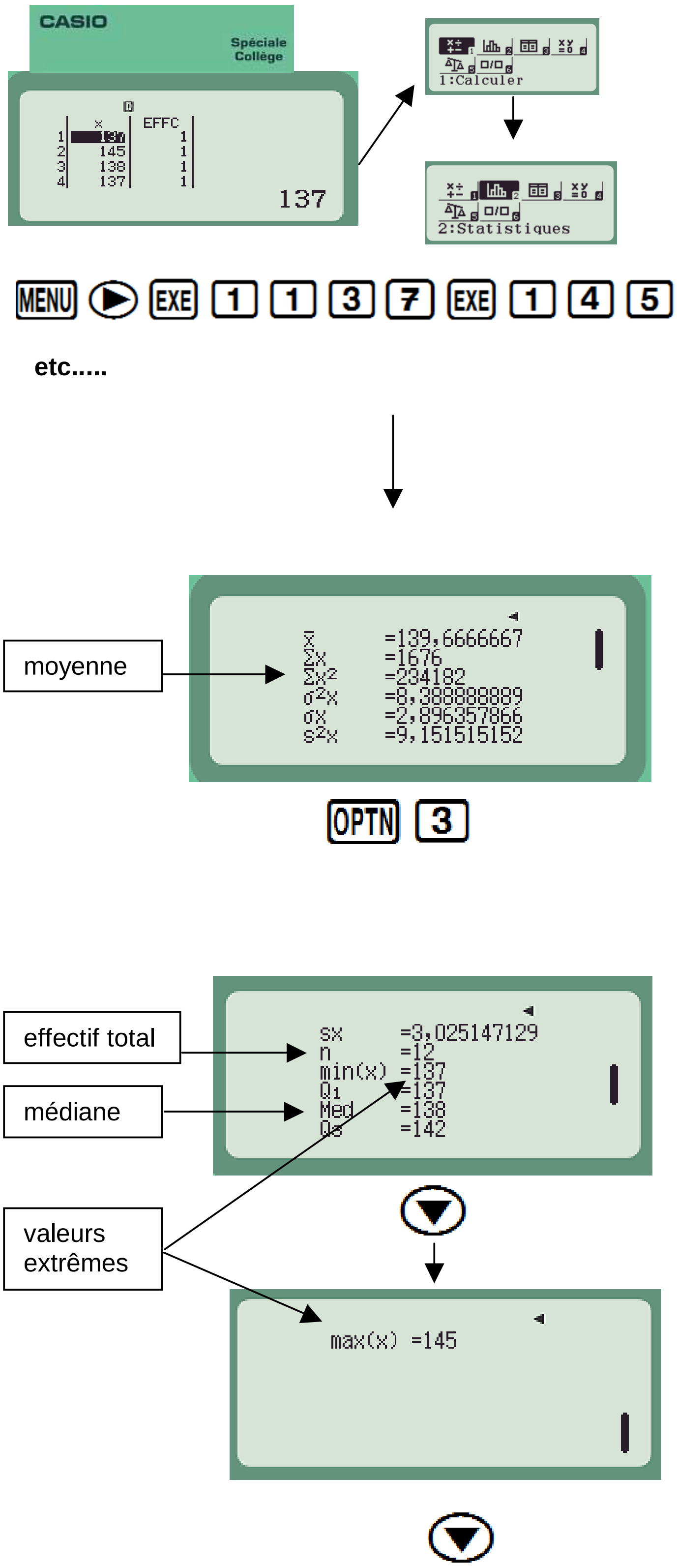
Ex : Soit la série statistique suivante

3 8 8 9 11 11 11 12 13 19

L'**étendue de cette série** est 19 – 3 = **16**

<u>avec la calculatrice :</u>

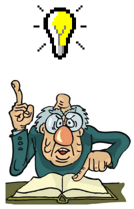


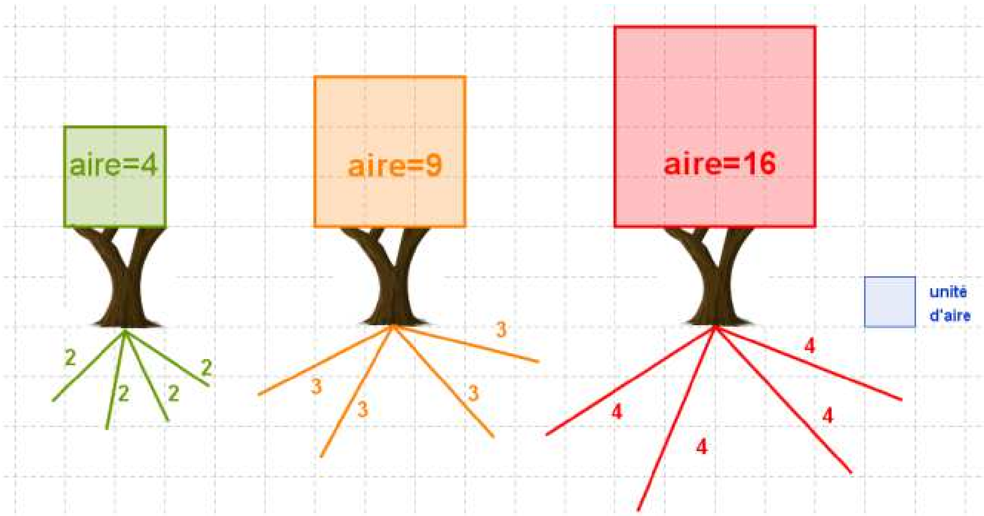


Théorème de Pythagore

I) Racine carrée d'un nombre positif :

Les racines sont à l'origine de l'arbre.
Pour faire **un carré d'aire 9 cm^2**, il faut que je choisisse **un côté de 3 cm de longueur**.
La longueur du côté est la **"racine"** de l'aire du carré.
3 est la racine carrée de 9.





<u>définition :</u> Soit a un nombre positif. La **racine carrée de a** est le **nombre positif** dont **le carré** est égal à **a.** La « **racine carrée** de **a »** se note : $\sqrt{a}$

- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a} \geqslant 0$

Le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé **un radical**
"radical" vient du latin radix (racine)

4 est la **racine carrée** de 16. En effet, **4^2 = 4 x 4 = 16** !

<u>Ex :</u>

$\sqrt{0} = 0$ ← $0^2 = 0$

$\sqrt{1} = 1$ ← $1^2 = 1$

$\sqrt{25} = 5$ ← $5^2 = 25$

$\sqrt{169} = 13$ ← $13^2 = 169$

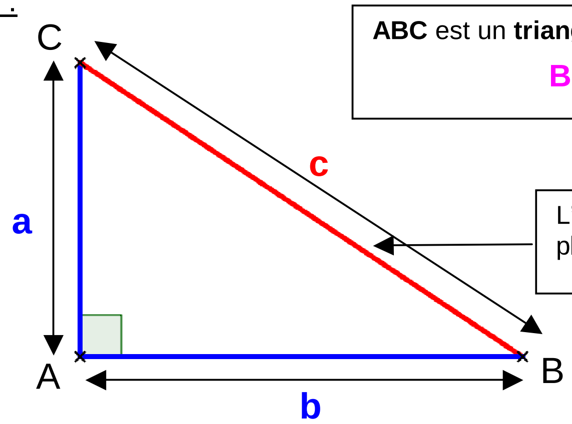
un carré parfait est un nombre dont la racine carrée est un nombre entier. Il est utile de connaître ceux ci-dessous.

carré parfait	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
racine carrée	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

II) Théorème de Pythagore

propriété : **Théorème de Pythagore**
Si **un triangle est rectangle**, alors **le carré de la longueur de l'hypoténuse** est égal à **la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés**.

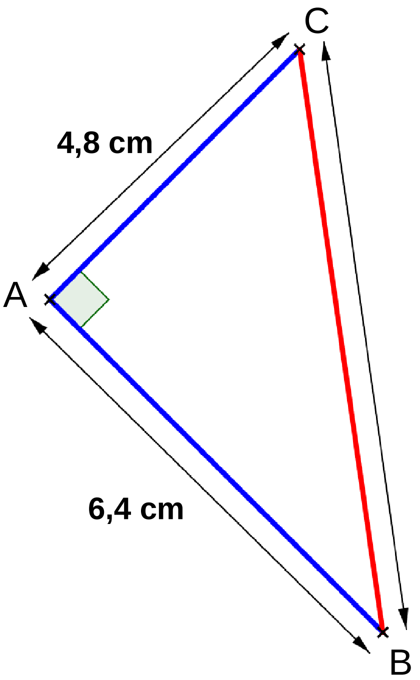
Ex :



ABC est un **triangle rectangle** en A , il vérifie **l'égalité de Pythagore** :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$ **ou** $c^2 = a^2 + b^2$

L' **hypoténuse** est le côté le plus grand du triangle rectangle

Ex : **ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 6,4cm et AC = 4,8 cm.**
Calculer BC.



Calculons BC :

ABC est un triangle rectangle en A

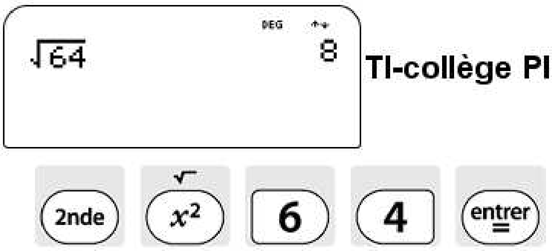
Donc **d'après le théorème de Pythagore**

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

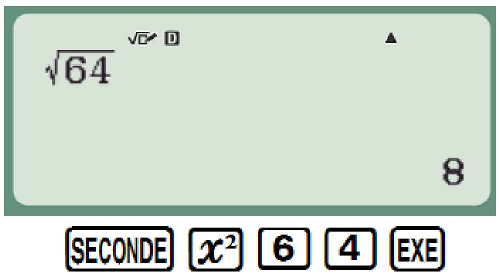
$BC^2 = 6,4^2 + 4,8^2 = 64$

Donc **BC = 8 cm**

Je cherche le nombre qui, élevé au carré, sera égal à 64. Il s'agit de 8. 8 est **la racine carrée** de 64.
Je peux calculer une racine carrée avec ma calculatrice.



TI-collège Plus



Casio fx92 Spéciale Collège

III) Démontrer qu'un triangle est rectangle :

propriété : Réciproque du théorème de Pythagore
Si **le carré de la longueur du plus grand côté** d'un triangle est égal à **la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés**, alors **ce triangle est rectangle**.

Pour déterminer si un triangle est rectangle :
- on calcule le carré de la longueur du plus grand côté
- on calcule la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés

► Si les 2 nombres sont égaux, l 'égalité de Pythagore est vraie, donc le triangle est rectangle.
► Si l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, le triangle n'est pas rectangle.

Ex : **Un triangle OUV est tel que OU = 8,9cm, OV = 3,9 cm, UV = 8cm.**
OUV est-il un triangle rectangle ?

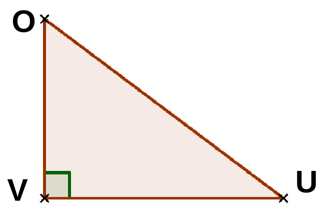
Le côté le plus long est [OU] ← Pour pouvoir vérifier l'égalité de Pythagore, il faut que je connaisse le côté le plus long !!

On a $\mathbf{OU^2} = 8{,}9^2 = 79{,}21$
D'autre part, $\mathbf{OV^2 + UV^2} = 3{,}9^2 + 8^2 = 79{,}21$

Donc $OV^2 + UV^2 = OU^2$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore,
le triangle OUV est rectangle en V.

Il est **rectangle en V** puisque **[OU] est l'hypoténuse** (le plus grand côté !)



IV) Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle :

propriété : Si **l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée** dans un triangle alors **ce triangle n'est pas rectangle**.

Ex : **Un triangle MNP est tel que MN = 7cm, MP = 5cm, NP= 6cm.**
MNP est-il un triangle rectangle ?

Le côté le plus long est [MN]

On a $\mathbf{MN^2} = 49$
D'autre part, $\mathbf{MP^2 + NP^2} = 25 + 36 = 61$

Donc $MP^2 + NP^2 \neq MN^2$

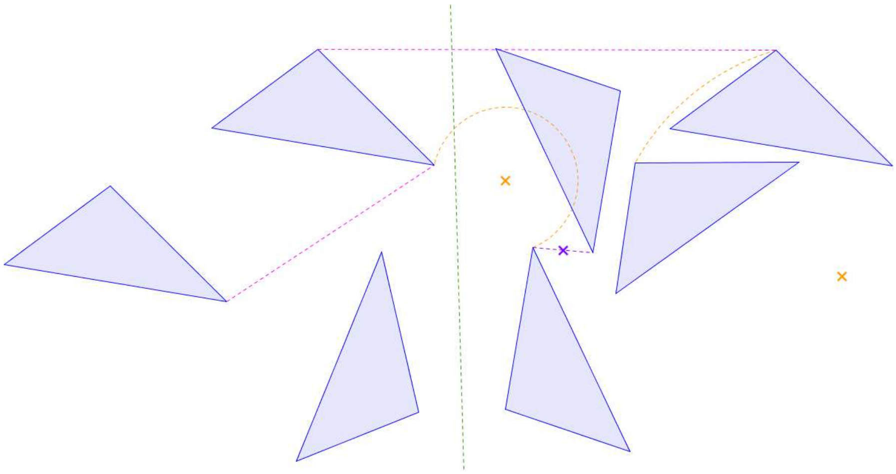
L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée donc **le triangle n'est pas rectangle**.

Égalité de triangles

Notion de triangles superposables

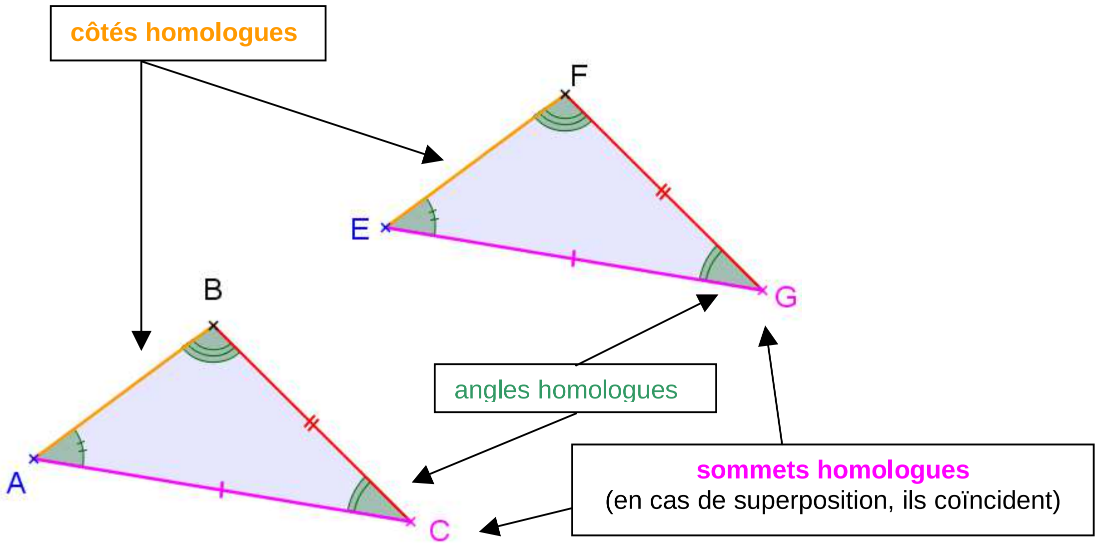
Deux triangles sont **superposables** quand on peut les faire coïncider par glissements, retournements, rotations, translations, symétries.

En utilisant les transformations du plan qui **conservent les longueurs**, on obtient des triangles superposables !



I) Triangles égaux

définition : Des triangles **égaux** sont des triangles **superposables**.



les côtés des triangles égaux sont deux à deux de même longueur :
AB= EF ; BC = FG ; AC = EG

les angles des triangles sont deux à deux de même mesure :
$\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$; $\widehat{BCA} = \widehat{FGE}$; $\widehat{CAB} = \widehat{GEF}$

II) Les différents cas d'égalité des triangles

a) premier cas

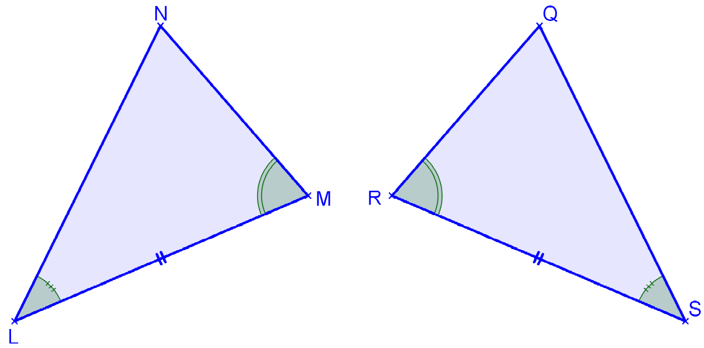
propriété : Si deux triangles ont **deux côtés de même longueur compris entre deux angles de même mesure** deux à deux, alors **ces deux triangles sont égaux**.

Ex :
Montrons que LMN et RQS sont deux triangles égaux :

Je sais que
LM=RS, $\widehat{NLM}=\widehat{QRS}$ et $\widehat{NML}=\widehat{QSR}$

Donc, d'après la propriété précédente,

LMN et QRS sont deux triangles égaux.



b) deuxième cas :

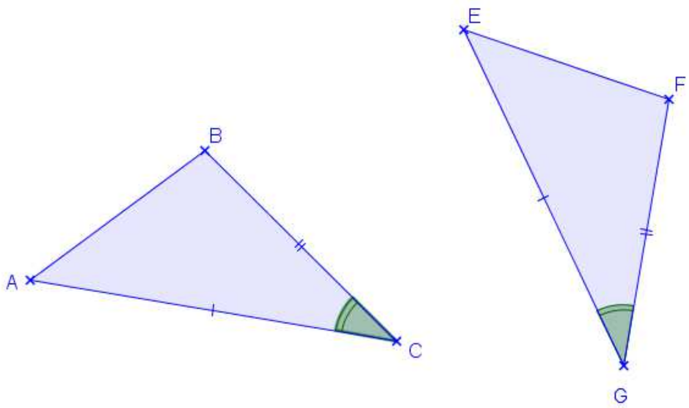
propriété : Si deux triangles ont **un angle de même mesure compris entre des côtés deux à deux de même longueur**, alors **ces deux triangles sont égaux**.

Ex :
Montrons que ABC et EFG sont deux triangles égaux :

Je sais que
BC=FG, AC = EG et $\widehat{ACB}=\widehat{EGF}$

Donc, d'après la propriété précédente,

ABC et EFG sont deux triangles égaux.



b) troisième cas :

propriété : Si deux triangles ont **leurs côtés deux à deux de même longueur**, alors **ces deux triangles sont égaux**.

Ex :
Montrons que KJL et OPQ sont deux triangles égaux :

Je sais que
KJ = PQ, JL = OQ et KL = OP

Donc, d'après la propriété précédente,

KJL et OPQ sont deux triangles égaux.